Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino
Vol. 52, 2 (1994)
WALTI

Y. Chevallard

ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE ET TRANSPOSITION DIDACTIQUE

Abstract. This paper brings together a number of developments that the author presented at the IRRSAE-Piemonte and at the University of Torino in November 1986.

In order to achieve readability, a two-part structure has been adopted: the first part is concerned with the basics of didactics transposition theory, while the second part focuses on the dicactic transposition of algebra.

A) SUR LE PROCESSUS DE TRANSPOSITION DIDACTIQUE

1. Eléments structurels

1.1. L'univers dans lequel le schéma décrit ci-après prend son sens est celui de la *société*, au sein de laquelle on distinguera d'abord le *système d'enseignement*.

1.2. A l'intérieur du système d'enseignement se forment, vivent puis disparaissent les *systèmes didactiques*, dont les composants essentiels sont l'*enseignant*, les *enseignés*, un *savoir*. (On notera que le système d'enseignement contient bien d'autres éléments que les systèmes didactiques, et notamment les dispositifs permettant la formation des systèmes didactiques par la régulation des flux d'enseignés).

1.3. Autour du système d'enseignement *stricto sensu*, on trouve une zone d'interfaçage avec la société, que l'on appellera *noosphère*. L'ensemble du système d'enseignement et de sa noosphère est désigné comme le système d'enseignement *lato sensu*. La noosphère contient notamment les professeurs militants, leur associations, les producteurs et les défenseurs de telle doctrine didactique, etc.

1.4. A l'intérieur de la société, et à l'extérieur du système d'enseignement *lato sensu*, deux instances jouent un rôle essentiel dans les mécanismes examinés plus loin: la communauté savante relative au savoir enseigné – ici, la communauté des mathématiciens –, d'une part; le groupe des parents, d'autre part.

1.5. A ces deux groupes sociaux on peut adjoindre de multiples autres groupes, dont

l'importance a été jusqu'ici (et en ce qui concerne l'enseignement général du moins) relativement faible: en particulier les groupes de métier.

2. L'écologie du savoir enseigné

2.1. Lorsqu'on considère un système didactique (ou, plus exactement, une classe détérminée de systèmes didactiques), on observe qu'en ces systèmes se traite "du savoir". En première approximation, on peut considérer le thème de la transposition didactique comme une réponse (globale, et qui demande à être approfondie en chaque cas particulier) à la question: d'où ce savoir vient-il?

2.2. Au delà de la question de l'origine, ou plutôt de la genèse du savoir enseigné, une autre question (ou plus exactement une autre classe de questions) doit être posée: quelles sont les conditions qui permettent l'existence de ce savoir, ou de tel ou tel de ses éléments, qui en expliquent les modalités d'apparition, de fonctionnement, de changement et de disparition?

2.3. C'est l'ensemble de ces conditions (et des analyses qui les prennent pour objet) que nous appellerons l'*écologie du savoir enseigné.*

2.4. Le processus de transposition didactique apparaît alors comme l'ensemble des mécanismes par lesquels est engendré le savoir enseigné, dans des formes compatibles avec l'ensemble des conditions qui lui sont imposées et au regard desquelles il devra prouver sa *viabilité* – sauf à disparaître des systèmes didactiques (disparition qui est, au demeurant, un phénomène banal et périodiquement observable).

3. La contrainte de compatibilité avec le savoir savant

3.1. Dans les systèmes d'enseignement modernes, issus des systèmes d'enseignement formées en Europe occidentale à partir du XVIe siècle, la *contrainte dominante* est une contrainte de compatibilité avec le *savoir savant* correspondant au savoir enseigné, au sein de cet univers culturel qu'est la société.

3.2. L'absence d'un savoir correspondant qui soit regardé, dans la culture de la société considérée, comme "véritablement" savant, constitue une situation particulière, source de dysfonctionnements essentiels; cette question sera laissée de côté dans ce qui suit.

3.3. La compatibilité avec le savoir savant prend la forme d'une reconnaissance, par la communauté savante correspondante, du savoir enseigné comme digne de recevoir l'étiquette (le "label") que le système d'enseignement entend lui attribuer – en bref que ce qui s'enseigne sous le nom de mathématiques, par exemple, est bien reconnu par les mathématiciens comme étant des mathématiques.

3.4. Cette reconnaissance ne se fait pas sur la base d'un examen minutieux et rationnel, mais résulte, à chaque instant, d'une négociation sociale, où l'intervention médiatrice de

la noosphère joue un rôle structurellement et fonctionnellement décisif, et qui devient nettement (et parfois spectaculairement) visible dans les périodes critiques (dont le mouvement des mathématiques modernes constitue l'exemple caractéristique le plus récent).

3.5. Les résultats de cette négociation ne sont pas acquis une fois pour toutes: ils sont régulièrement remis en cause, tandis que la négociation, en sommeil pendant un temps, doit alors être activement reprise.

3.6. C'est ainsi que l'introduction de la "théorie des ensembles" à l'école primaire a permis – de concert avec d'autres éléments – de légitimer dans un premier temps, aux yeux des mathématiciens (pris ici non comme un groupe homogène, mais comme un groupe dans lequels certains, à un moment donné, entraînent plus ou moins massivement l'ensemble de leur communauté), le projet d'enseignement proposé par les "mathématiques modernes" comme relevant bien des mathématiques des mathématiciens. Mais cette légitimé a été, peu de temps après, remise en question (sur ce point au moins), la "théorie des ensembles" ayant été dénoncée comme trahissant la "véritable" théorie des ensembles...

4. La dialectique de la légitimation sociale

4.1. Le caractère dominant de la contrainte de compatibilité avec le savoir savant constitue un important principe d'économie en ce qui concerne le processus global de négociation, par le système d'enseignement (*lato sensu*) avec la société (prise comme un tout complexe), de la légitimité sociale et culturelle du projet (et des pratiques) d'enseignement. Elle permet en particulier de mener cette négociation avec un partenaire privilégié (le savoir savant en ses représentants), et tend à mettre à distance les autres partenaires potentiels du débat.

4.2. Mais ce caractère dominant peut s'affaiblir. Il en est ainsi par exemple lorsque la communauté savante ne joue pas, en telle ou telle occasion déterminée, le rôle de puissance d'investiture et de légitimation qui a été décrit plus haut – situation qui s'est produite en République Fédérale d'Allemagne en ce qui concerne le mouvement des mathématiques modernes par exemple.

4.3. Plus généralement, toute évolution qui tend à mettre en avant d'autres partenaires potentiels semble devoir affaiblir la place du système d'enseignement au sein de la société, dans la mesure exactement où ces partenaires ne bénéficient pas de l'autorité culturelle et sociale que suppose le pouvoir d'investiture permettant de conférer au projet et aux pratiques d'enseignement concernés la légitimité requise.

4.4. Il en va ainsi en particulier avec le groupe (multiforme et composite) des parents. Le rapprochement du savoir enseigné avec le savoir des parents (qui n'est pas homogène étant donné la stratification sociale, mais que a ses représentants à travers les associations de parents d'élèves, etc.) est en effet un piège: non seulement le groupe des parents est, jusqu'à

aujourd'hui, dépourvu de la puissance d'investiture et de légitimation nécessaire, mais – negativement – ce rapprochement tend à déqualifier socialement le travail de l'enseignant en banalisant les objectifs assignés au système d'enseignement – l'école primaire fournissant ici le cas le plus visible, mais non le seul, du type de dysfonctionnement qu'une telle évolution (en elle-même naturelle) tend à provoquer, et qui peut, à la limite, conduire les parents à regarder les enseignants comme recevant mission de faire ce qu'ils pourraient très bien faire eux-mêmes s'ils en prenaient le temps, dans une perspective où les enseignants reçoivent ainsi un statut social proche de celui de la femme de ménage...

4.5. La solution spontanément apportée au problème de l'équilibre de ce rapport de forces se trouve, pour résumer, dans l'établissement d'une "bonne distance", qui rapproche le savoir enseigné du savoir savant, et qui l'éloigne suffisamment du savoir des parents. Ces deux mouvements sont en fait solidaires – et il faut à nouveau souligner ici l'économie de principe ainsi réalisée – dans la mesure où tout rapprochement avec le savoir savant (actuel ou récent) entraîne *ipso facto* un éloignement par rapport au savoir des parents.

4.6. La question des conditions de compatibilité sociale du système d'enseignement se pose encore – comme on l'a noté – à propos d'autres groupes sociaux, et notamment les groupes de métier, en relation avec l'usage du savoir concerné qui se trouve réalisé dans tel ou tel de ces groupes. S'il est vrai que, à l'instar du groupe des parents, aucun groupe de métier ne semble disposer aujourd'hui du capital symbolique qui pourrait fonder la puissance d'investiture requise, le problème, cependant, se pose ici différemment.

4.7. D'une part, le système des groupes de métier est doté d'une structure très lâche, atomisée en une multiplicité largement incoordonnée de groupes incapables de donner l'impression de parler d'une seule voix, tandis que les contestations ponctuelles n'ont que peu de chances d'être culturellement prises en compte, dès lors qu'elles ont à s'opposer à la légitimité culturelle, historiquement acquise, des savoirs savants. D'autre part, l'articulation entre les groupes de métier et les savoirs savants dont ils mettent en oeuvre des éléments se fait de manière indirecte, par le truchement de médiations nombreuses, qui créent une constante opacité sociale et culturelle et empêchent ces groupes de développer une contestation argumentée (et non pas seulement globale et générale, laquelle, pour toujours renaissante qu'elle soit, demeure également peu crédible) des savoirs enseignés.

4.8. On notera de ce point de vue que l'intention, actuellement fréquemment formulée au sein de la noosphère, de ne plus donner aux savoirs enseignés que la seule référence des savoirs savants correpondants, apparaît à cet égard comme une difficile ambition – dès lors que ce rapprochement, mené avec désinvolture, entraînerait en même temps l'éloignement par rapport aux savoirs savants. Dans le dialogue qu'elle voudrait instaurer à cette fin, la noosphère découvre en effet que ses interlocuteurs sont introuvables (ce qui la conduit en bien des cas d'ailleurs à se créer des interlocuteurs imaginaires) ou – de toute façon –

démunis du pouvoir de faire avaliser socialement les résultats de la négociation si celle-ci pouvait être menée à son terme. Avant de decouvrir, sans doute, combien le refus du "bouclier" constitué par le savoir savant peut se révéler invalidant, en fragilisant la place du système d'enseignement au sein de la société.

4.9. Il convient enfin de souligner que la tendance, régulièrement explicitée, de la noosphère à rechercher de nouvelles alliances auprès de nouveaux partenaires sociaux, et qui semble procéder de l'illusion que le système d'enseignement peut s'affranchir sans dommage de son lien de vassalité à l'endroit du savoir savant, se manifeste sur le fond d'une illusion selon laquelle le savoir enseigné apparaît comme naturellement identifiable au savoir savant (ou à une partie de celui-ci). C'est cette *illusion de la transparence* du savoir enseigné qui se trouve dénoncée dès lors qu'on tente d'effectuer l'analyse des processus par lesquels est produit, historiquement, le savoir enseigné.

5. Le processus de transposition didactique

5.1. D'où vient le savoir enseigné ? Pour l'essentiel, du savoir savant correspondant. A quoi il faut ajouter des éléments de savoir endogènes, spécifiquement produits à l'intérieur du système d'enseignement (*lato sensu*), et qu'on désignera ici comme des *créations didactiques.*

5.2. La représentation que les acteurs du système d'enseignement se font de cette genèse historique est fondamentalement ambivalente. D'une part, l'illusion de la transparence conduit à percevoir les créations didactiques endogènes, et plus généralement les phénomènes liés à la transposition didactique, comme n'ayant que des effets contingents, circonstanciels, et donc non essentiels, sur le statut épistémologique de tel ou tel élément de savoir. D'autre part, et en conséquence, l'illusion de la transparence conduit à percevoir les possibilités de modification apportées au savoir enseigné comme infinies, librement ouvertes à l'enseignant, sans pourtant que se rompe le lien de filiation avec, et d'authentification par le savoir savant.

5.3. On n'analysera pas davantage, ici, les mécanismes généraux de la transposition didactique, et on se contentera de souligner que la formation du savoir enseigné à partir du savoir savant résout à la fois le problème de l'origine du savoir enseigné (avec quoi "fabriquer" du savoir enseigné ?) et le problème de l'*écologie sociale* du savoir enseigné (comment faire pour que le savoir enseigné soit écologiquement viable au sein d'une société donnée en tant que savoir enseigné ?), dans la mesure où son origine prépare de manière particulièrement favorable sa légitimation par le savoir savant.

6. Contraintes internes et écologie didactique

6.1. En pénétrant dans les systèmes didactiques, en prenant vie dans le processus didactique, le savoir à enseigner devient véritablement savoir enseigné. Or en cette étape, l'existence (ou la survie) du savoir enseigné suppose alors que soient satisfaites une somme de conditions internes au système d'enseignement, conditions dont le système d'ensemble constitue l'*écologie didactique* du savoir enseigné.

6.2. L'existence du savoir enseigné apparaît alors suspendue à sa capacité de satisfaire aux exigences du *contrat didactique*, lequel fixe, de ce point de vue, à la fois les "performances" et les limites des performances qui sont exigées de lui.

6.3. Dans le cadre des contrats didactiques modernes – ceux qui prévalent dans les systèmes d'enseignement actuels en particulier –, ces exigences peuvent être classées en deux catégories, solidaires l'une de l'autre. D'une part, le savoir enseigné doit pouvoir être présenté selon une progression argumentée, et définir ainsi une norme temporelle de progrès dans le savoir que l'on désignera sous le nom de *temps didactique*, le processus de construction (interne au système didactique) du temps didactique étant lui-même appelé *chronogénèse*. D'autre part, chaque "segment" du temps didactique doit dessiner deux places, l'une pour l'enseignant, l'autre pour l'enseigné, selon un processus appelé *topogénèse*.

6.4. C'est en ce point qu'interviennent les "sujets didactiques", l'enseignant et les enseignés. Comme le savoir savant, le savoir enseigné n'existe pas de manière immatérielle, *in vacuo*. Son existence suppose que des individus puissent entretenir avec lui certains *rapports* – le *rapport* au *savoir* – variables selon leur position au sein du système d'enseignement. Il faudra qu'enseignant et enseignés puissent venir occuper, par rapport au savoir enseigné, la place qui leur est formellement dévolue. On verra, en examinant rapidement le cas de l'enseignement de l'algèbre, qu'il s'agit là de conditions dont la réalisation s'avère décisive dans la survie et le façonnement du savoir enseigné.

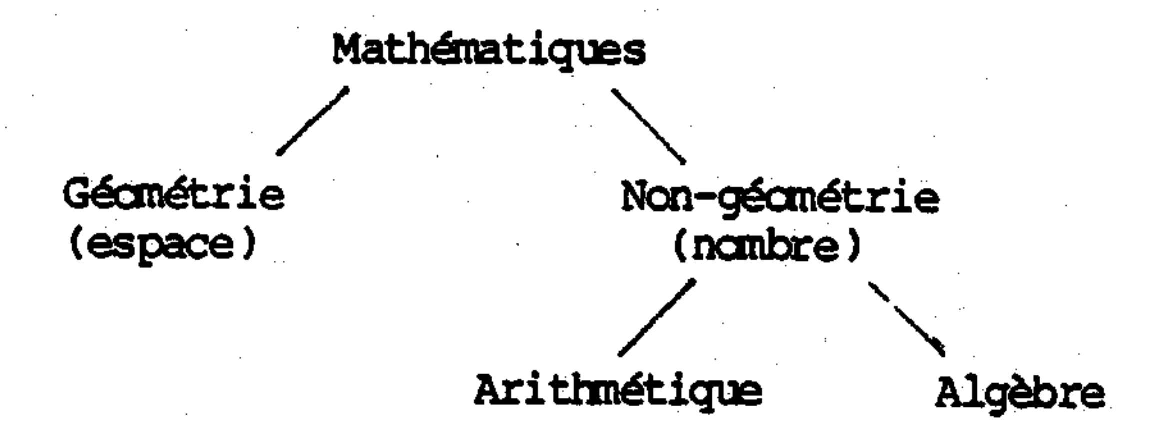
B) SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE ÉLEMENTAIRE

7. Qu'est-ce que l'algèbre? 1. Programmes et enseignants

7.1. On examinera ici le sens attribué au mot *algèbre* par les acteurs du système d'enseignement, dans le cadre des collèges français, soit la partie de la matière enseignée qu'ils subsument sous ce nom.

7.2. Précisons d'abord rapidement la signification qui semble être donnée à ce mot dans

les *programmes* officiels (ou encore dans les manuels, qui sont leurs intercesseurs auprès des enseignants et, d'une manière différente, des élèves). L'étiquette "algèbre" a longtemps joué en France un rôle structurant essentiel dans le corpus des mathématiques enseignées, de concert avec "arithmétique" et "géométrie" (en laissant ici de côté l'analyse mathematique), dans le cadre d'une structure doublement oppositive représentée par la figure ci-après.



7.3. Cette structure du savoir mathématique enseigné – qui est la structure des mathématiques que reconnaît déjà Descartes – s'est maintenue pour l'essentiel jusqu'à la réforme des mathématiques modernes, qui entre officiellement en vigueur en France à la fin des années soixante (ou au début des années soixante-dix, selon les classes). Mais au-delà elle se défait (même si le mot d'algèbre demeure vivant, point sur lequel nous allons revenir), et se trouve remplacée par une simple opposition géométrie/(structures) numérique(s). (Voir Chevallard 1985a.)

7.4. Ce mouvement est poursuivi et confirmé par la récente réforme des programmes du collège rendue publique en 1985 (et qui affecte la classe de sixième à la rentrée 1986), programmes structurés selon les rubriques opposées des "Travaux geométriques" et des "Travaux numériques", auxquelles vient s'ajoindre une novation, la rubrique intitulée "Organisation et gestion de données. Fonctions". Dans ce cadre, les éléments que l'on pourrait assigner à l'algèbre se trouvent inclus dans le domaine du numérique – ici, dans la rubrique des "Travaux numériques" (voir l'annexe 1).

7.5. En ce qui concerne l'emploi par les enseignants du mot "algèbre" – dont l'emploi officiel, comme on l'a noté, se réduit à très peu de chose –, il semble que l'on puisse le résumer en disant que ce mot tend à s'appliquer, informellement, à *tout ce qui n'est pas géométrie.*

7.6. On considérera ci-après les réponses apportées par 24 enseignants de collège à la

question suivante:

"Une personne ayant fait des études scientifiques mais qui a perdu contact avec l'enseignement secondaire actuel vous demande ce que l'on enseigne aujourd'hui, en algèbre, au collège. Que lui répondez-vous?"

Les réponses sont reproduites dans l'annexe 2. On notera que l'une d'elle – la réponse 15 – est nettement atypiqe et qu'une autre – la réponse 24 – est une quasi non-réponse. Dans ce qui suit, on ne prendra donc en compte qu'un corpus de 22 réponses.

7.7. Le tableau 1 présente (sous une forme éclatée, qui fait perdre leur tonalité propre aux réponses analysées) les occurrences de différents traits descriptifs utilisés. On notera d'abord la large dispersion de ces descriptions de l'algèbre enseignée au collège si on les regarde comme composants d'un *tableau d'ensemble* du domaine considéré. Cela confirme la formule indiquée plus haut: l'algèbre, c'est (au moins...) *tout* ce qui n'est pas géométrie. Si l'examen du tableau 2 montre qu'aucun des 22 enseignants ne cite plus de 4 des 7 rubriques recensées, on doit admettre pourtant que l'usage informel du mot d'algèbre dans le jargon professionnel des enseignants français de collège peut recouvrir l'ensemble des rubriques répertoriées ici (la réponse "géométrie" donnée par l'enseignant 13 devant vraisemblablement être entendue, ainsi que nous l'avons fait, comme se référant à l'utilisation de l'algèbre en géométrie).

7.8. Le paysage que dessinent ces réponses apparaît toutefois fait de masses fortement dissymétriques. Le noyau central des descriptions est constitué – comme on pouvait s'y attendre – par les thèmes *Equations* et *Calcul algébrique*, le premier étant cité 30 fois et par 17 enseignants, le second 32 fois et par 19 enseignants. Les 5 enseignants qui n'ont pas cité le thème *Equations* ont tous cité le thème *Calcul algébrique*; inversement, les 3 enseignants qui ne mentionnent pas le thème *Calcul algébrique* citent le thème *Equations*.

7.9. La seconde masse est constituée par l'unique thème *Calculs sur les nombres*, qui est cité par 10 enseignants sur 22 et reçoit en tout 20 citations. Ce positionnement des structures numériques dans le cadre de l'algèbre ne doit pas faire illusion (voir Chevallard 1985a): alors qu'il se justifierait d'un point de vue théorique que nous développerons plus loin, il est ici la manifestation de l'aboutissement d'une évolution historique récente qui, par le truchement de l'importation dans le système d'enseignement de la théorie des structures algébriques, a permis de penser (d'une manière déterminée) le thème des systèmes de nombres comme relevant de l'algèbre ("moderne"), au détriment de l'algèbre élémentaire classique devenue quant à elle évanouissante, sinon bien sûr dans les pratiques (comme on peut le constater), du moins dans le libellé des programmes officiels.

TABLEAU 1

Equations

- Equations: 4, 6, 8, 13, 16.
- Equations du 1er dégré: 1, 3, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23.
- Inéquations du 1er dégré: 1, 11, 17, 18, 20, 22, 23.
- Systèmes d'équations du 1er dégré: 10, 17, 20.
- Systèmes d'inéquations du 1er dégré: 17, 20.
- Equations du second degré: 20.

Calcul algébrique

- Emploi de lettres: 1, 7, 18.
- Parenthèses: 2, 21.
- Ecriture d'expressions algébriques: 2.
- Calcul (algébriques): 2, 3, 8, 18, 21, 22.
- Calcul sur les polynômes: 14.
- Puissances: 5, 9.
- Identités remarquables: 1, 4, 12, 13, 16, 17, 21.
- Factorisations, développements: 1, 5, 6, 9, 11, 13, 14, 17, 18, 23.

Calculs sur les nombres

- Ensembles de nombres et opérations: 10, 22.
- Décimaux: 3.
- Relatifs: 12.
- Fractions: 1, 3, 12, 16, 17.
- Rationnels: 3.
- Racines carrées, irrationnels: 1, 3, 17.
- Réels: 5, 12, 19, 22, 23.
- Règles des signes: 17.
- Valeurs absolues: 17.

Résolutions de problèmes

- Résolution de problèmes: 1.
- Mise en équation de problèmes ("concrets"): 3, 6, 18, 19.

Fonctions (linéaires et affines): 3, 14, 17, 23.

Ensembles: 7, 10, 16.

Applications à la géométrie

- Géométrie (sic): 13.
- Géométrie cartesienne et vecteurs: 22.
- Angles: 22.
- Trigonométrie: 22.

TABLEAU 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Equations	2	X	1	1	X	1	X	1	X	2	2
Cal. alg.	3	3	1	1	2	1	1	1	2	X	1
Cal. num.	2	X	4	X	1	X	X	X	X	1	X
Rés. pb.	1	X	1	X	X	1	X	X	X	X	X
Fonct.	X	X	X	X	X	X	X	1	X	X	X
Ens.	X	X	X	X	X	X	1	X	X	1	X
Appl. géo.	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

	12	13	14	16	17	18	19	20	21	22	23
Equations	1	1	X	1	4	2	1	5	1	2	2
Cal. alg.	1	2	2	1	2	3	X	X	3	1	1
Cal. num.	3	X	X	1	4	X	1	X	X	2	1
Rés. pb.	X	X	X	X	X	1	1	X	X	X	X
Fonct.	X	X	1	X	1	X	X	X	X	X	1
Ens.	X	X	X	1	X	X	X	X	X	X	X
Appl. géo.	X	1	X	X	X	X	X	X	X	3	X

7.10. Viennent ensuite les autres rubriques (*Résolution de problèmes, Fonctions, Ensembles et Applications à la géométrie*) dont les "scores" sont respectivement (5,5), (4,4), (3,3) et (2,4). Quelques remarques peuvent être faites ici pour éclairer le lecteur.

1. La mention de la résolution de problèmes semble bien être un écho du mouvement récent, et relativement insistant, qui s'est développé en France au sein de la noosphère, au cours des dernières années, autour de la doctrine de la "pédagogie du problème" – bien plus qu'un vestige d'une situation traditionnelle (laminée en son temps par la réforme des

mathématiques modernes) où l'algèbre était déclarée (plus que pratiquée) comme méthode de résolution de problèmes (arithmétiques).

2. Le thème des fonctions était anciennement – et notamment dans les programmes et les manuels d'algèbre relatifs à l'enseignement du lycée – inclus dans le domaine de l'algèbre. Sa présence est ici plus probablement l'effet de l'apparentement des fonctions étudiées au collège – les fonctions linéaires et affines – avec des objets mathématiques appartenant au noyau de l'algèbre enseignée à ce niveau – équations et inéquations du premier degré.

3. Le thème des ensembles est cité, par 2 enseignants sur les 3 qui le mentionnent, comme résiduel (voir dans l'annexe 2 les réponses des enseignants 7 et 10), en conformité avec ce que l'on peut directement observer. Après avoir en effet tenu une place essentielle dans les programmes et dans l'enseignement des années 1970, les notions ensemblistes y occupent depuis la fin des années soixante-dix une position très marginale. Mais il est intéressant de noter ici ces vestiges, qui soulignent l'extension et le flou de l'acception attribuée au mot d'algèbre.

4. Les applications à la géométrie, enfin, se rattachent à l'algèbre pour partie dans le cadre du tryptique

équations du premier degré / fonctions affines / droites

En revanche, la mention de la trigonométrie (qui, il est vrai, n'apparaît ici que dans une réponse) pourrait être mise en relation avec la présentation actuelle des notions trigonométriques, qui fut introduite dans la noosphère dès le milieu des années soixante-dix par le livre de Gustave Choquet, *L'enseignement de la géométrie* (Hermann, Paris, 1964).

8. Qu'est que l'algèbre? 2. Le savoir savant

8.1. L'examen du savoir savant met en relief un point essentiel: le "noyau primaire" de l'algèbre, c'est la théorie des équations, telle que la crée, dans la première partie du IXe siècle, al-Khwarizmi. Il faut souligner tout de suite, sur l'exemple des problèmes (que nous disons) du premier degré, en quoi l'algèbre – en ce sens – se différencie de l'arithmétique.

8.2. Considérons le problème suivant, emprunté à un manuel d'arithmétique publié en 1925 (voir l'annexe 3):

> *"Un négociant achète une pièce de drap à raison de 40 francs le mètre. Il en revend le quart à 54, 40 francs le mètre, 1/5 à 56 francs le mètre, et le reste à 50 francs le mètre. Il retire de cette vente un bénéfice de 1476 francs. Combien y avait-il de mètres dans la pièce de drap?"*

La résolution de ce problème *par l'algèbre* suppose d'abord le choix de l'inconnue – on prendra ici le nombre cherché, soit la longueur de la pièce de drap achetée –, puis la

mise en équation, qui conduit ici à écrire:

$$54,40(x/4) + 56(x/5) + 50(x - x/4 - x/5) - 40x = 1476.$$

C'est en ce point que l'on doit recourir au "calcul équationnel" (où l'on trouve à l'état de germe ce qui deviendra le calcul algébrique le plus général), lequel permet de réécrire l'équation obtenue sous des formes successives équivalentes:

* en multipliant par 20:

$$272x + 224x + 50(20x - 5x - 4x) - 800x = 29520$$

* en réduisant les termes semblables:

$$496x + 550x - 800x = 29520$$

soit encore: $$246x = 29520$$

* en divisant alors par 246:

$$x = 120.$$

8.3. Examinons maintenant la solution traditionnelle, *par l'arithmétique*, du même problème. La méthode à mettre en oeuvre est ici le procédé dit de "fausse position" (ou de "fausse supposition"), encore appelé *regula falsi.* Bien entendu, il n'y a pas alors mise en équation véritable; mais il sera utile, pour la comparaison visée, de se référer à l'équation obtenue plus haut. On choisit un nombre quelconque, que l'on regarde comme une "fausse valeur" du nombre cherché; plus habilement, pour éviter les fractions, il est judicieux de choisir ici un multiple commun à 4 et 5, par exemple 20. Dès lors, on peut déterminer, *par un simple calcul numérique*, ce que le négociant aurait gagné s'il avait effectivement acheté une pièce de drap de la longueur choisie, à savoir:

	5 fois	54,40	francs
plus	4 fois	56	francs
plus (20-5-4) fois, soit	11 fois	50	francs
moins	20 fois	40	francs

soit encore	272	francs
plus	224	francs
plus	550	francs
moins	800	francs

c'est-à-dire enfin 246 francs.

Or on sait que ce négociant a en fait gagné 6 fois plus, puisque: 1476/246 = 6. C'est "donc" que la pièce de drap qu'il avait effectivement achetée était de longueur 6 fois supérieure à la longueur posée, i.e. de longueur 120 mètres.

8.4. Si – d'une manière historiquement non pertinente – on met en oeuvre la méthode de fausse position en se guidant, pour conduire les calculs numériques, sur l'équation telle que l'établit la méthode algébrique, une différence frappante apparaît: dans la méthode arithmétique, on ne "manipule" pas l'équation, on ne touche pas à l'équation (et il n'est donc pas nécessaire de l'écrire: l'énoncé du problème fournit en général assez clairement le fil conducteur des calculs numériques). Dans la méthode algébrique, au contraire, c'est *la manipulation pertinente* (et mathématiquement valide) de l'équation qui est la clé de la solution du problème. (On notera ici que les problèmes proposés au titre de la méthode arithmétique dans l'enseignement d'autrefois conduiraient, s'ils étaient traités par la méthode algébrique, à des équations du premier degré dont la complexité est souvent supérieure à ce qu'il est d'usage de proposer aujourd'hui aux élèves qui abordent l'apprentissage de l'algèbre élémentaire: le lecteur pourra le vérifier en examinant les problèmes figurant dans l'annexe 3.)

8.5. L'emploi de la méthode algébrique suppose ainsi la maîtrise, au-delà des règles de base du calcul équationnel – *al-jbr* ou changement de membre d'un terme, *al-muqabala* ou réduction des termes semblables –, de tout un *calcul algébrique*, qui se développe bientôt hors du cadre strict des manipulations d'équations, directement sur les expressions algébriques. Ce sont les successeurs d'al-Khwarizmi (notamment al-Karaji) qui en seront les pionniers.

8.6. Du point de vue qui est le nôtre ici, l'évolution historique de l'algèbre savante peut etre résumée par trois faits (en laissant de coté pour le moment les problèmes du symbolisme algébrique – qui se règlent pour l'essentiel entre la fin du XVIe et le début du XVIIe siècle–, d'une part, et le problème – qui ne sera vraiment réglé qu'au XIXe siècle – des systèmes de nombres, d'autre part).

1. La relation de l'algèbre, comme secteur des mathématiques savantes, à la résolution des problèmes arithmétiques traditionnels auxquels se référait toute la mathématique ancienne, de Babylone jusqu'à al-Khwarizmi, s'estompe rapidement, parce que de tels problèmes, exceptés ceux qui constituent le corpus diophantien (lesquels continueront longtemps d'alimenter la réflexion mathématique), sont théoriquement réglés et n'apparaissent plus guère que comme de simples applications pour les commençants. Le lecteur trouvera, dans l'annexe 4, un choix de tels problèmes, empruntés à l'*Arithmetica universalis* de Newton (1707).

2. Les algébristes s'attachent prioritairement, jusqu'à Descartes et sa Géométrie (1637), à développer la théorie des équations. On connaît les grandes étapes de cette aventure: les algébristes italiens du XVIe siècle (Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli, etc.) résolvent les équations générales de degrés 3 et 4 (les mathématiciens arabes n'y étaient pas parvenus); leurs successeurs buteront longuement sur les équations

de degré supérieur jusqu'à ce que, entre la fin du XVIIIe siècle (Vandermonde, Lagrange) et le début du XIXe (Abel, Galois), l'on parvienne à une réponse négative (impossibilité de la résolution algébrique, "par radicaux", des équations de degré supérieur ou égal à 5), en même temps que se créent, comme sous-produits promis à un magnifique avenir, les premiers concepts de l'"algèbre moderne".

3. L'outil que constitue le calcul algébrique – sous sa forme "symbolique" moderne, par opposition aux formes "rhétorique" et "syncopée" que distinguait Nesselmann (1842) – pénètre (non sans résistances parfois, comme on l'observe à propos de la "géométrie pure") tous les domaines des mathématiques et trouve des champs d'application nouveaux en géométrie (Descartes) et en théorie des nombres d'abord, puis, en une extension illimitée, dans l'analyse mathématique – l'"analyse algébrique" –, avec la création, à la fin du XVIIe siècle, du calcul infinitésimal.

9. La spécificité de l'algèbre enseignée

9.1. Jusqu'à un certain point, l'enseignement de l'algèbre au collège puis au lycée – mais au collège surtout, puisque c'est là que se font les apprentissages fondamentaux à cet égard – répond, dans son organisation, à la description donnée ci-dessus de l'évolution de l'algèbre savante. Les équations (du premier, puis du second degré) y occupent une place non négligeable et, surtout, le calcul algébrique s'y trouve (relativement) fort développé. Nous montrerons pourtant dans ce qui suit que, au-delà de la permanence des domaines et des notions, la perspective, la *problématique* dans laquelle ces thèmes apparaissent vont changer.

9.2. Le développement du calcul algébrique, historiquement, est lié d'abord à la théorie des équations. Or, l'enseignement du collège nous montre une disproportion frappante entre les exercices de calcul algébrique proposés aux élèves, d'une part, et les calcul algébrique effectivement exigés d'eux dans le cadre de la résolution d'équations, d'autre part: ceux-ci sont généralement beaucoup plus "simples" que ceux-là. Le thème des équations ne suffirait donc pas à justifier, s'il en était besoin, l'importance donnée au calcul algébrique. Si maintenant – en se guidant ici sur l'hisoire de l'algèbre –, on cherche à se tourner vers d'autres cadres qui pourraient requérir une maîtrise plus avancée du calcul algébrique, force est de constater qu'on ne les trouve guère – au collège du moins.

9.3. En réalité de tels cadres existent, ou existent bien davantage, au lycée. Le premier bénéfice de l'investissement réalisé au collège en matière de calcul algébrique, l'élève va le recevoir, en effet, lorsqu'il abordera le thème du calcul des fonctions dérivées, dès lors qu'il aura affaire aux fractions rationnelles par exemple. Ce constat est corrélatif d'un autre trait général de l'enseignement de l'algèbre élémentaire: à défaut de pouvoir disposer de domaines d'interventions adaptés, l'apprentissage du calcul algébrique se fait, à

peu de choses près, *in vacuo*, de manière intrinsèque, sans relation avec un but mathématique dans la poursuite duquel le calcul algébrique interviendrait comme un moyen, et qui donnerait leur pertinence aux manipulations effectuées sur les expressions algébriques. Et, lorsque de tels domaines d'intervention se rencontrent, la maîtrise acquise à vide, c'est-à-dire aussi les automatismes intériorisés comme une seconde nature par l'élève, ne sont que par chance appropriés à la spécificité de la tâche. Nous donnerons de cela un exemple.

9.4. Considérons l'exercice suivant:

"*Calculer la dérivée de la fonction* $f(x) = (2x + 3)/(x + 1)^2$."

On suppose que l'élève mette ici en oeuvre la formule

$$(u/v)' = (u'v - uv')/v^2 .$$

Dans cette hypothèse, il obtient d'abord:

$$(*) \qquad f'(x) = (2(x + 1)^2 - 2(2x + 3)(x + 1))/(x + 1)^4 .$$

La formule employée ne conduit pas plus loin. Ce sont alors les automatisme engendrés par le premier apprentissage du calcul algébrique qui prennent le relais, et conduiront éventuellement l'élève à *développer* le numérateur (et – pourquoi pas? – le dénominateur aussi peut être), pour obtenir alors (en écartant toujours toute erreur de calcul);

$$(**) \qquad f'(x) = -2(x^2 + 3x + 2)/(x + 1)^4 .$$

Imaginons maintenant un autre exercice:

"*Déterminer le sens de variation de la fonction* $f(x) = (2x + 3)/(x + 1)^2$."

Ici, l'élève est amené à calculer la dérivée de la fonction f, non pour elle-même, mais avec une intention au service de laquelle ce calcul n'est qu'un moyen: il s'agit pour lui de déterminer le signe de la dérivée. Or cette *finalisation* du calcul va influer – le cas échéant – sur le calcul lui-même, en fournissant un critère de pertinence concernant la *forme* du résultat obtenu, et donc aussi les *décisions* à prendre au cours de la conduite du calcul. Si par exemple l'élève procède ainsi qu'on l'a décrit ci-dessus, l'expression de la dérivée obtenu en (**) n'est pas la plus appropriée et, du point de vue du but poursuivi, le calcul *n'est pas terminé*: il faut encore factoriser le numérateur, afin de déterminer le signe de $f'(x)$. Mais en fait il eut été au moins aussi pertinent, en l'espèce, de ne pas céder à l'automatisme de développement, qui induit à passer de (*) à (**), mais d'opérer dès cette étape une factorisation du numérateur, suivie d'une simplification de la fraction, ou encore de simplifier directement (par $x+1$) sur la forme brute obtenue en (*), pour arriver enfin à:

$$f'(x) = (2(x+1) - 2(2x+3))/(x+1)^3$$
$$(***) \qquad = (-2x-4)/(x+1)^3$$
$$= -2(x+2)/(x+1)^3 .$$

9.5. Cet exemple permet d'apercevoir deux faits essentiels. D'une part, le premier apprentissage du calcul algébrique – étalé en France sur les années de quatrième et de troisième – se fait dans un cadre *formel*, et non dans un cadre *fonctionnel*. D'autre part, et en conséquence – si du moins l'élève poursuit ses études générales (dans le cadre de l'enseignement du lycée) –, les acquis de ce premier apprentissage seront mis à l'épreuve dans un cadre autre, fonctionnel celui-là, et se trouveront donc retravaillés et remaniés, dès lors que l'élève sera amené à faire usage du calcul algébrique à titre de moyen ou d'outil dans des domaines variés des mathématiques. On ne s'arrêtera pas sur ce second aspect ici, se contenant de souligner que, dans cette seconde phase, et au contraire de ce qui se passe dans la première, il y aura apprentissage sans qu'il y ait à proprement parler enseignement, i.e. sans qu'il y ait intention d'enseigner à l'élève un autre type de rapport au calcul algébrique. (Les enseignants de lycée pensent généralement la mise en oeuvre du calcul algébrique que suppose l'enseignement qu'ils donnent comme une simple application d'un savoir déjà constitué et, en consequence, s'étonneront, ou s'indigneront parfois, de l'inhabileté des élèves à cet égard.)

9.6. Nous nous limiterons dans ce qui suit à une analyse rapide du premier apprentissage du calcul algébrique. Cet apprentissage, avons-nous dit, se fait dans un cadre "formel". Or on touche là à une manière de paradoxe: l'apprentissage des *aspects formels* des mathématiques (en l'espèce, du calcul algébrique) *ne peut se réaliser que de manière très inadéquate dans un tel cadre formel* ... Mais en fait, il n'y a là nul paradoxe. Il s'agit en effet de faire acquérir à l'élève la maîtrise de la manipulation formelle des expressions algébriques; or, comme dans tout domaine soumis à un système de règles – que l'on songe ici à un jeu, tel les éches –, cette maîtrise ne porte pas que sur les règles prises comme schèmes d'actions séparés des situations dans lesquelles elles pourront être mises en oeuvre; elle devrait, en son principe – c'est-à-dire par référence à l'usage effectif des ces règles dans le cadre de la pratique mathématique –, porter tout autant sur la maîtrise de l'emploi pertinent, fonctionnel, des règles formelles dont l'"apprentissage" est visé. C'est un premier aspect, que nous avons déjà souligné plus haut, et sur lequel on ne saurait trop insister.

9.7. Car en réalité le calcul formel qui constitue le support du premier apprentissage du calcul algébrique suppose de toute façon un cadre de référence. A défaut d'un cadre explicite fournissant un guide à la conduite du calcul, et par rapport auquel le calcul algébrique apparaîtrait comme un outil aux emplois divers, il existe bien un cadre de

référence, mais qui demeure implicite: ce cadre – depuis longtemps familier à l'élève – est celui du calcul *arithmétique*, qui va fonctionner alors comme un véritable paradigme. Or si l'on peut bien considérer que les règles du calcul algébrique sont l'expression des *propriétés* des opérations arithmétiques, le *fonctionnement* de ces règles en calcul algébrique n'est pas superposable à leur fonctionnement arithmétique. En arithmétique en effet, tout calcul opère constamment en simplification, soit *à complexité ostensive décroissante*: on y verra par exemple fonctionner la transformation $2 + 3 = 5$, jamais la transformation inverse, $5 = 2 + 3$. Or il en va tout autrement en calcul algébrique. D'une part, l'objectif de simplification des expressions algébriques suppose fréquemment, à titre d'intermédiaire, une complexification (i.e. une factorisation) préalable: ainsi afin de simplifier la fraction

$$(x^3 - 3x^2 + x - 3)/(x^2 - x - 6),$$

devra-t-on d'abord observer que l'on a (par exemple)

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) = (x - 3)(x^2 + 1)$$

et

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

D'autre part, c'est en bien des cas une complexification qui appaîrait pertinente. Considérons ainsi l'expression

$$(2x + 3)/(x + 1)^2 - 2/x\,.$$

L'habitus "arithméticoïde" poussera ici l'élève, à qui serait demandé sans plus de "calculer cette expression", à la traiter comme il le ferait d'une différence de deux fractions numériques:

$$\begin{aligned}(2x + 3)/(x + 1)^2 - 2/x &= ((2x^2 + 3x) - 2(x + 1)^2)/x(x + 1)^2 \\ &= -(x + 2)/x(x + 1)^2\,.\end{aligned}$$

Mais si l'expression en question représente une fonction dont il s'agirait de déterminer une primitive, le calcul devient fonctionnel, et la conduite du calcul n'est plus dès lors déterminée par une consigne formelle générale. On sait en effet que l'objectif pertinent à assigner au calcul est, dans l'exemple examiné, celui d'aboutir à une forme complexifiée particulière de l'expression donnée – sa décomposition en "éléments simples":

$$(2x + 3)/(x + 1)^2 - 2/x = 2/(x + 1) + 1/(x + 1)^2 - 2/x\,.$$

9.8. Le cadre formel à l'intérieur duquel s'enferme le premier apprentissage de l'algèbre présente un autre caractère d'inadéquation. On a vu qu'il induisait, chez l'élève, des comportements automatiques peu adaptés à l'emploi fonctionnel du calcul. Mais, de plus, la gamme de ces comportements apparaît étroitement limitée en regard de la variété des manipulations des expressions algébriques que l'emploi du calcul algébrique suppose.

Cette limitation traduit la capacité qu'a l'enseignant, lorsqu'il opère à l'intérieur d'un tel cadre formel, d'engendrer des comportements de manipulation d'expressions algébriques. Travaillant à vide sur ces expressions, l'élève ne peut agir qu'en se référant à quelques consignes purement formelles: "calculer", "développer", "factoriser", "simplifier" (avec quelques variantes parfois: "calculer le plus simplement possible", etc.). Pour mieux souligner en quoi la thématique des comportements induits est *pauvre*, nous prendrons encore un exemple. Considérons l'expression littérale $(2a+1)+((2a+1)+2)$. Si l'on se demande quel *traitement formel* de cette expression l'enseignant va pouvoir obtenir de l'élève *dans un cadre formel*, la réponse est aisée. La seule des consignes précédemment citées qui soit ici mobilisable est en effet: "calculer l'expression..." – consigne qui, sauf erreur de l'élève, produira un comportement de calcul du type suivant (correspondant classiquement à la "réduction des termes semblables"):

$$(2a+1)+((2a+1)+2)=(2a+1)+(2a+3)=2a+2a+1+3=4a+4\,.$$

La comparaison avec les *différents traitement formels* que l'enseignant pourra obtenir de l'élève *dans un cadre fonctionnel* est, par contraste, éclairante. Voici un premier énoncé (dans tout ce qui suit, les nombres considérés sont des entiers naturels):

> *"On considère deux entiers impairs successifs. Montrer que leur somme est un multiple de 4, c'est-à-dire un nombre de la forme $4A$, où A est un entier".*

La réponse à cette consigne peut alors être la suivante.

> *"Soit* $2a+1$ *le premier entier impair. Son successeur impair est alors* $(2a+1)+2$. *La somme des deux entiers impairs successifs est:*
>
> $$(2a+1)+((2a+1)+2)$$
>
> *soit encore ...* $4a+4=4(a+1)$, *expression montrant que la somme est bien un multiple de 4."*

Dans ce cas, l'élève est conduit, pour des raisons liées au problème à résoudre, à arrêter son calcul, non pas sur la forme $4a+4$, mais, allant plus loin, sur la forme $4(a+1)$. Mais voici maintenant un autre énoncé mettant en jeu (le cas échéant) la même expression algébrique:

> *"Soient deux entiers impairs successifs. Montrer que leur somme est égale à 2 fois l'entier pair compris entre eux."*

Dans ce cas, le calcul, mené d'abord jusqu'à la forme $4a+4$, se poursuit, mais autrement qu'on ne l'a fait dans le premier cas examiné. L'élève devrait en effet écrire ici:

$$4a+4=2(2a+2)\,.$$

Si l'on avait cru possible d'objecter, à l'examen du premier exemple, que le comportement obtenu par la voie fonctionnelle (qui conduisait à la forme $4(a+1)$) aurait aussi bien pu être obtenu par la consigne formelle "Calculer l'expression ..., puis effectuer une factorisation", on voit ici qu'une telle consigne – combinaison, au demeurant artificielle, de consignes de base recensées plus haut – est alors incapable de produire le comportement engendré par le second énoncé. En fait, bien d'autres comportements pourraient être obtenus par la voie fonctionnelle qui échappent à toute consigne formelle (sauf à compliquer exagérément de telles consignes). Ainsi l'énoncé

> *"Montrer que la somme de deux entiers impairs successifs est supérieure ou égale à 4"*

amènerait à écrire $4a + 4 = 4 + (4a)$, tandis que l'énoncé

> *"Montrer que la somme de deux entiers impairs successifs est la somme d'un multiple de 3 et d'un entier supérieur ou égal à 4"*

conduirait, quant à lui, à: $4a + 4 = 3a + (4 + a)$, etc.

9.9. Toutes les analyses qui précèdent avaient pour objet premier de faire apparaître en quoi il y a une *spécificité* de l'algèbre enseignée. Cette spécificité a été mise en avant en opposant ici un calcul algébrique "formel" – qui a effectivement cours dans l'apprentissage de l'algèbre – à un calcul algébrique "fonctionnel" – qui est le mode d'emploi usuel du calcul algébrique. A cet égard, nous ferons encore ici une observation: il existe plusieurs manières classiques de nier la spécificité de l'algèbre enseignée. La plus fréquemment employée, celle à laquelle pourront recourir par exemple les enseignants qui se sentent bien dans la tradition d'enseignement où ils doivent opérer, c'est que la différence entre l'algèbre enseignée et l'algèbre "savante" n'est qu'une affaire de *niveau*, sans autre variation essentielle, sans véritable solution de continuité: c'est ainsi que l'élève n'aura à connaître et à utiliser qu'un très petit nombre de produits remarquables simples, tel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, tandis que, dans ses propres travaux, un mathématicien comme Lagrange, pour ne prendre que cette référence, eut à mettre en oeuvre des résultat plus divers et plus complexes, tel par exemple l'égalité $(x^2 - ay^2)(x'^2 - ay'^2) = (xx' + ayy')^2 - a(xy' + yx')^2$, etc. A cette interprétation *banalisante* et sereine s'oppose une seconde interprétation classique, *dénonciatrice* et militante: l'algèbre enseignée contrasterait bien avec l'algèbre savante – et il en irait de même d'ailleurs à propos de tout secteur des mathématiques –, en ceci que la première diffère de la seconde par son *archaïsme*, par son retard historique, qu'une réforme nécessaire et une mise à jour volontaire permettraient de combler. On observera ici seulement que la volonté de "modernisation", qui a conduit en l'espèce à introduire dans l'enseignement quelques-unes des notions emblématiques de l'algèbre moderne (celles de groupe, d'anneau, etc.), a laissé inchangé le problème de l'enseignement du calcul

algébrique, d'une part, tandis que le constat d'un écart entre savoir enseigné et savoir savant pouvait être entièrement repris à propos de l'algèbre moderne elle-même, d'autre part – preuves, s'il en était besoin, que l'analyse faite n'était pas entièrement pertinente... En fait, dans les deux "explications" citées ici, on ignore le fait fondamental qui est à la base de ces phénomènes d'écart entre savoir savant et savoir enseigné engendrés par le processus de transposition didactique: dans les systèmes didactiques, le savoir est soumis à des contraintes spécifiques, des contraintes proprement didactiques qu'ignore largement le fonctionnement du savoir savant. C'est un point que nous examinerons maintenant.

10. Contraintes didactiques internes

10.1. Revenons ici au point de départ de l'ensemble des analyses du paragraphe précédent: le développement du calcul algébrique, dans l'enseignement donné au collège, est sans commune mesure avec les usages qui en sont véritablement faits. En réalité pourtant, nous avons affaire ici à un phénomène qui n'est nullement spécifique de l'algèbre, non plus que du calcul algébrique lui-même, et qui répond en fait à deux contraintes majeures de l'écologie didactique (dans l'origine desquelles nous n'entrerons pas ici). Un, le processus d'enseignement suppose un découpage de la matière enseignée en domaines (l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, la trigonométrie, etc.) et en sous-domaines (les équations, le calcul algébrique, les systèmes de nombres, etc.) jouissant d'une autonomie relative les uns par rapport aux autres et qui finissent par n'avoir plus entre eux que des liens putatifs plutôt que réels. Deux, de tels domaines et sous-domaines, dès lors libérés de l'obligation de s'articuler entre eux de manière approfondie, peuvent se développer pour eux-mêmes, et tendent à prendre la plus grande extension possible.

10.2. On notera à cet égard l'existence d'une contrainte corrélative: pour qu'un thème donné puisse être enseigné, c'est-à-dire soit didactiquement viable, il est nécessaire (quoique non suffisant, bien sûr) qu'il puisse apparaître comme trouvant sa place au sein d'un sous-domaine suffisamment vaste – ce que nous appellerons un "tout structuré". Si un tel environnement n'existe pas a priori, il peut y avoir alors création artificielle d'un tel domaine ou sous-domaine à partir du "germe" constitué par le thème donné. (C'est ainsi que, partant de l'étude du trinôme du second degré, on a pu en arriver historiquement à l'inflation indentifiée en france sous le nom de "trinômite" au cours des années soixante.) Mais, inversement, il apparaît que le développement anarchique d'un domaine ou sous-domaine déterminé connaît des limites, qu'il ne peut guère outrepasser sans qu'une réaction se produise: c'est ainsi que la réforme des mathématiques modernes a donné un coup d'arrêt à l'inflation du calcul algébrique et a éradiqué en grande partie la trinômite qui sévissait jusque-là (voir Chevallard 1985a).

10.3. Voyons alors en quelle manière les deux types de contraintes mentionnées plus

haut se trouvent satisfaites s'agissant de l'enseignement de l'algèbre. D'une part, l'algèbre, dont le noyau est la théorie des équations et qui est, à l'origine, un outil pour la résolution de problèmes, s'autonomise par rapport à l'arithmétique traditionnelle qui lui fournissait son corpus de problèmes à résoudre. Elle constitue, pendant toute la période que l'on peut appeler classique (et qui s'achève en France avec la réforme des mathématiques modernes), un domaine bien identifié, aux frontières nettement marquées. Mais, à l'intérieur de ce domaine retranché, de sous-domaines également bien étiquetés se mettent progressivement en place. On observera que si, historiquement, le calcul algébrique dérive de la théorie des équations – dont il apparaît d'abord comme un adjuvant nécessaire–, le processus d'enseignement, selon une disposition usuelle, renverse l'ordre de la genèse, pose le calcul algébrique d'abord, et inscrit à sa suite, dans l'ordre de la chronogénèse, la théorie des équations, qui le suppose officiellement tout en l'ignorant largement. Chacun de ces deux sous-domaines se développe alors selon une logique qui lui est propre. Le calcul algébrique prolifère autour de quelques thèmes privilégiés: développement des expressions algébriques (incluant notamment les "puissances", c'est-à-dire les règles de manipulation des exposants), factorisation, identités remarquables. Quant à la théorie des équations, dont le développement semble a priori limité dès lors que, en cette étape initiale, elle ne concerne que les équations du premier degré, elle trouve un vaste domaine d'extension, par "bourgeonnement": fonctions affines, droites du plan, voire inéquations du premier degré (et même programmation linéaire élémentaire) en sont les prolongements "naturels" – phénomène dont trouve un écho, ainsi qu'on l'a vu, dans l'acception du mot d'algèbre reçue parmi les enseignants.

10.4. Un autre ordre de contrainte est lié à l'existence de ce qu'on a appelé la topogénèse. La relation didactique qui se noue autour de l'algèbre doit faire une place à l'enseignant, une place aux enseignés. Nous examinerons d'abord ce dernier problème. Dans le cadre formel qu'on a précédemment décrit, l'élève se trouve devant une situation qui est essentiellement la suivante: muni d'une consigne déterminée (résoudre l'équation..., développer, factoriser, simplifier, etc.), il doit "gérer" des expressions algébriques selon ce que nous nommerons un *code d'action*. C'est sur la nature exacte de ce code qu'il y a, semble-t-il, une ambiguïté fondamentale. On le décrit d'ordinaire en disant que l'élève se voit enseigné divers *algorithmes* qu'il aurait ensuite à utiliser de manière à la fois *correcte* du point de vue de la validité de l'exécution, et *pertinente* du point de vue de la situation traitée. Mais si la notion d'algorithme ne fait pas véritablement problème lorsqu'il s'agit de l'appliquer dans le domaine numérique, il n'en va plus de même lorsqu'on la transporte dans le domaine algébrique. Il n'est ainsi guère possible de décrire par un algorithme le comportement attendu d'un élève en réponse à la consigne de factorisation. S'il s'agit par exemple de factoriser l'expression $3xy - 6x$, on attendra qu'il aboutisse à l'écriture

$3x(y-2)$, et des réponses telles que

$$3xy(1-2/y)$$

ou simplement $$6x(y/2-1)$$

seront regardées comme non conformes, bien qu'elles soient mathématiquement correctes (la première sous la condition $y \neq 0$ toutefois). En fait, le comportement attendu (et positivement sanctionné) correspond ici, non pas à un algorithme mathématique au sens strict, mais à une certaine *orthodoxie* de comportement définie par (ce que nous appellerons) un *code de bonne conduite*, code longuement appris par l'élève au sein de la classe – au sein des classes successives. Si l'on peut bien dire, en effet, que dans le passage de telle expression à telle autre, il y a eu factorisation (ou développement, ou simplification), la consigne de factorisation, par exemple, n'a pas un sens entièrement fixé. Or c'est une contrainte didactique que la réponse attendue ("orthodoxe") à une consigne déterminée soit elle-même déterminée. Elle sera donc ici surdéterminée, par le biais d'habitus que l'ordre didactique vient surajouter à l'ordre mathématique lui-même. Et c'est l'ensemble de ces surdéterminations didactiquement nécessaires (dans le cadre formel où l'on opère), mais mathématiquement contingentes (et souvent non pertinentes ou inopportunes dès lors que le calcul est conduit dans un cadre fonctionnel), que le code de bonne conduite algébrique engendre et active.

10.5. L'intervention de ce code de bonne conduite formelle est évidemment rendue nécessaire par le fait que la manipulation des expressions algébriques n'a d'autre but qu'elle-même, si l'on peut dire, et qu'elle constitue une fin en soi. Dans la conduite du calcul, l'élève ne peut guère se fier qu'à une "tradition" vécue, en ne s'étayant que partiellement sur la consigne mathématique donnée, laquelle, à ce niveau des études mathématiques, demeure imprécise faute déjà de pouvoir se formuler à l'aide des notions appropriées (le lecteur aura remarqué que les deux factorisations "non orthodoxes" données plus haut auraient pu être écartées a priori par la consigne "Factoriser dans $Z[x,y]$ l'expression..."). Or cette tradition se nourrit essentiellement d'une "morale" gestionnaire, d'un habitus de gestion des écritures mathématiques qui vient tout droit du calcul sur les expressions numériques tel que l'élève l'a pratiqué, antérieurement à son entrée dans le domaine algébrique. Cette condition dessine pour l'élève une place – au sein de la relation didactique – dont l'investissement se trouve dès lors largement facilité. Car l'élève retrouve ici des gestes, des valeurs, des automatismes qui lui sont depuis longtemps familiers. Il pourra faire fond, entre autres, sur l'habitus de "simplification" qui régit l'ensemble du domaine du calcul numérique à un niveau élémentaire (on sait par exemple que, lorsqu'ils débutent en calcul littéral, beaucoup d'élèves se demandent comment "effectuer" – c'est-à-dire simplifier – l'expression $a+b$, selon une habitude acquise en arithmétique, où elle règle tout calcul). Cette reconduction

des règles de gestion de l'univers numérique de l'arithmétique élémentaire au sein du domaine algébrique est, en un sens, facilitatrice: en permettant à l'élève de conserver et de réinvestir un acquis antérieur sans le remettre en cause (sinon très partiellement: ainsi devra-t-il admettre "qu'on n'effectue pas $a + b$"), elle contribue à assurer la viabilité de la relation didactique ainsi définie, laquelle attribue à l'élève une place qu'il pourra plus facilement venir occuper, parce qu'on lui propose alors d'entretenir avec le calcul algébrique un rapport dont une partie des termes lui sont déjà largement familiers. On a là, du point de vue de la viabilité interne, une solution apparemment stable, fondée, comme on l'a vu, sur un traitement déterminé de la dialectique de l'ancien et du nouveau: les objets (les expressions algébriques) sont nouveaux; le socle sur lequel se bâtit le mode de traitement de ces objets est, quant à lui, ancien, puisqu'emprunté à l'univers du calcul arithmétique. On a montré plus haut que, cependant, cette solution didactique peut être mise en question: en assujetissant un domaine nouveau (l'algèbre) à un domaine ancien (l'arithmétique), elle hypothèque en partie l'avenir de l'outil algébrique, dont on peut juger – nous en avons parlé et nous allons y revenir – qu'elle en amoindrit la portée et en pervertit la signification, et ceci d'abord, non pour l'observateur extérieur (mathématicien, épistémologue, didacticien ou enseignant des classes ultérieures), mais pour l'élève lui-même – lors du premier apprentissage d'abord (dont le cadre artificiel est corrélatif de l'établissement d'un rapport au savoir algébrique éminemment incertain), lors de sa mise en oeuvre fontionnelle dans une étape ultérieure des études ensuite, dans la mesure où le rapport élaboré jusque-là apparaît inadapté aux emplois fonctionnels qui seront alors requis, ainsi qu'on a tenté de le montrer plus haut.

10.6. Venons-en maintenant à ce que nous avons appelé la place de l'enseignant. On peut reprendre ici, de ce point de vue, les élements des analyses précédentes. Opérant dans un cadre formel, l'enseignant doit à la fois donner à l'élève matière à agir (par la mise en oeuvre des fameux "algorithmes") et contrôler son action afin de réduire (selon une exigence proprement didactique que nous avons soulignée) l'espace – mathématiquement ouvert – des comportements possibles, jusqu'à n'y enfermer plus que le comportement orthodoxe attendu. Cette difficile mission ne peut réussir que par le recours à de multiples dispositifs visant à isoler et à fragmenter artificiellement les thèmes à enseigner, afin d'éviter toute contamination entre eux, en étiquetant chacun des micro-mondes ainsi obtenus par des consignes rituelles fonctionnant selon une logique quasi pavlovienne. On notera en particulier le problème si aigu que propose le traitement du thème de la factorisation. Dans un univers dont le tropisme fondamental (importé de l'arithmétique) pousse l'élève à conduire son calcul vers du toujours plus simple, la factorisation implique, quant à elle, une complexification. Traitée de manière isolée, comme il en va dans le cadre formel adopté, la factorisation va exiger alors tout un ensemble de précautions afin de parvenir à s'affirmer dans un univers qui lui est a priori hostile: le "monde clos de la factorisation" (voir Tonnelle

1979) apparaît pour cela, plus encore que d'autres micro-mondes algébriques, comme fait de rituels méticuleux dans lesquels l'enseignant, ordonnateur d'une liturgie qui ne trouve de justification nulle part ailleurs qu'en elle-même, doit craindre à chaque instant qu'un dérapage se produise (tel par exemple le mouvement réflexe connu qui peut induire un élève, après avoir factorisé une expression, à la développer à nouveau, à son insu même, selon la pente de l'habitus le plus puissant).

10.7. Dans ce premier apprentissage de l'algèbre, l'enseignant entretient donc avec le savoir à enseigner un rapport "morcelé", au terme duquel l'algèbre tend pour lui à se dissoudre en une multiplicité de micro-mondes juxtaposés (plutôt que coordonnés). Mais, pour décrire plus complètement la place qu'il pourra occuper, il faut en outre prendre en compte un phénomène qui, à ce niveau, est spécifique de l'algèbre (par contraste avec l'arithmétique et la géométrie élémentaires), et qu'on peut articuler en trois points.

1. Premier point, dans nos systèmes d'enseignement, la relation didactique, de l'enseignant vers l'enseigné, s'établit et se maintient à l'intérieur d'un univers d'*oralité*, et la *phonè* – la voix – est son médium. Aussi toute exigence d'écriture imposée à l'enseignant met-elle en danger la relation didactique, et risque de briser son cours. Le discours du savoir auquel la relation didactique que nous connaissons est avant tout appropriée est un discours oral. Il en est ainsi de l'aritmétique traditionnelle, dont la transcription écrite est toujours seconde; et, lorsque en géométrie le graphisme intervient de manière quasi nécessaire, la voix de l'enseignant peut continuer à maintenir le contact, parce qu'elle peut commenter ce que fait la main, dans une glose qui n'est pas pure et simple paraphrase du dessin, mais au contraire développe les raisons qui le motivent et qu'il exprime – car le graphisme est vu ici comme témoin, déploiement et triomphe de la pensée.

2. Deuxième point, l'écriture algébrique, à l'inverse, ne renvoie à aucun discours oral préalable; elle n'est en rien la transcription écrite d'un discours oral qui serait premier par rapport à elle. Si la voix de l'enseignant doit maintenir son flux quand l'enseignant manipule – en les écrivant – des expressions algébriques, le discours qu'elle porte n'est qu'un redoublement oral, une "oralisation" du geste de la main qui écrit, une glose redondante, gauche, inutile en elle-même.

3. Troisième point enfin, la solution qui s'offre à la géométrie est, culturellement, interdite à l'algèbre: pour de raisons qui tiennent, croyons-nous, à l'histoire des cultures occidentales dans leurs strates les plus profondes, l'algèbre – le jeu avec les expressions algébriques – se voit refusé le statut de "pensée": derrière le mouvement de la main qui écrit, il n'y aurait nulle raison à faire valoir, seulement l'expression d'une mécanique, réglée mais dépourvue de raison. L'écriture (algébrique) est le tombeau de la pensée.

Illusion d'autant plus convaincante, on l'aura deviné, qu'elle s'attache à une pratique de l'algèbre conduite dans un cadre formel, où les raisons d'être des développements

du calcul n'appartiennent pas au registre mathématique, et ne peuvent s'exprimer en s'autorisant clairement d'un projet ni d'objets mathématiques. L'enseignement de l'algèbre bute ainsi sur une contrainte externe, sur laquelle nous reviendrons plus loin, qui manifeste, la pression que la culture exerce sur le système d'enseignement. Et s'il est vrai que la contrainte générale d'oralité qui ordonne la relation didactique tend à faire qu'en tout domaine enseigné le travail d'écriture soit versé du côté de l'élève (comme le montre cette image emblématique de la relation didactique: l'enseignant dicte, l'élève écrit), cela est, si l'on peut dire, plus vrai encore s'agissant de l'algèbre élémentaire. Aussi aboutit-on à cette situation où l'enseignant prétend enseigner ce qu'il ne peut lui même pratiquer, et qu'il ne pratique guère devant les élèves; où l'enseigné doit se saisir d'une pratique dont il est le seul pratiquant. Tout cela conduit à une présomption d'indignité de l'algèbre, au sein d'une situation verrouillée: à l'image culturelle de l'algèbre, chassée du paradis de la pensée, refoulée dans les basses terres de l'écriture mécanique et sans gloire, répond en écho, dans la réalité didactique, la différenciation asymétrique des places de l'enseignant et de l'enseigné vis-à-vis du travail algébrique. Nous ajouterons ici, sans développer ce point, qu'on peut voir en cela une des sources non négligeables de certains types d'échecs électifs en mathématiques.

11. Contraintes externes

11.1. On peut, d'une manière quelque peu abstraite, dire que c'est "la société" qui définit son système d'enseignement, ses contenus, ses procédures; ou, idéalement et de manière dès lors prescriptive, que c'est à "la société" qu'il échoit de le faire. L'adéquation de l'état réel des choses avec cette conception ou ce voeu (quant à la façon dont une société déterminée règle ses rapports avec son école) n'écarte pas, toutefois, la possibilité que des contradictions (ou des obstables, etc.) se manifestent entre les buts officiellement assignés et les contraintes que la société fait peser sur le fonctionnement de l'école. C'est dans ce cadre général que l'on situera les remarques qui suivent à propos de l'enseignement de l'algèbre.

11.2. L'apparition de l'algèbre en Occident a été saluée par les mathématiciens comme l'avènement d'une ère nouvelle, le point le plus évident – et longtemps le seul – sur lequel les Anciens se voyaient dépassés. Dans son *Introduction en l'art analytique* (1591), Viète présentait l'algèbre comme permettant de "donner solution à tout problème" et, à quelque deux siècles de distance, les rédacteurs de l'*Encyclopédie* ne seront pas moins élogieux. "l'Algèbre, y lit-on ainsi, est la plus merveilleuse méthode que l'esprit de l'homme ait découvert pour la résolution des problêmes" (article PROBLEME). Dans l'article consacré à l'ANALYSE (laquelle "est proprement la méthode de résoudre les problêmes mathématiques, en les réduisant à des équations" et qui, pour ce faire, "emploi le secours de l'algèbre, ou le calcul des grandeurs en général" de sorte que "ces deux

mots... sont souvent regardés comme synonymes"), d'Alembert écrivait: "L'analyse est l'instrument ou le moyen général par lequel on a fait depuis près de deux siècles, dans les Mathématiques, de si belles découvertes. Elle fournit les exemples les plus parfaits de la manière dont on doit employer l'art du raysonnement, donne à l'esprit une merveilleuse promptitude pour découvrir des choses inconnues, au moyen d'un petit nombre de données; & en employant des signes abrégés et faciles pour exprimer les idées, elle présente à l'entendement des choses, qui autrement sembleraient être hors de la sphère".

11.3. Cette fervente déclaration contraste avec le destin culturel de l'algèbre – de "l'analyse algébrique". D'Alembert la présente comme terre d'élection du "raisonnement"; mais, culturellement, elle fut toujours, et demeure jusqu'à ce jour, rejetée hors de valeurs nobles de la culture, exclue de l'ordre de la pensée, et étrangère à son plus beau fleuron, le "raisonnement". A rebours, géométrie et arithmétique ont été mêlées consubstanciellement, dès l'origine, au terreau sur lequel s'est élevée la "culture occidentale" (prise ici comme un tout). Que chacune d'elles se soit trouvée clivée (et cela dès l'origine) entre une partie noble et spéculative et une partie basse et appliquée – géométrie et arithmétique pratiques –, a seulement permis un jeu utile entre diverses "perspectives" d'enseignement d'une "même" matière – "la géométrie", "l'arithmétique".

11.4. L'algèbre, au contraire, a résisté à la culture occidentale, et, dualement, n'a jamais été vraiment adoptée par elle, apparaissant, en son sein, comme un corps étranger. Il y a ici une continuité d'attitude frappante, qui va des formes élevées du discours philosophique – les philosophes ont glosé sur la géométrie, et à peu près complètement ignoré l'algèbre – aux formes les plus ordinaires de la représentation sociale. Or cette situation de "l'algèbre dans la culture" (situation que nous n'étudierons pas davantage ici) a eu et continue d'avoir des effets déterminés sur l'enseignement de l'algèbre.

11.5. Elle a des effets déjà sur les mathématiciens eux-mêmes: c'est ainsi qu'on veut voir, dans la querelle qui, au XIXe siècle, opposa les tenants d'une géométrie "pure" (ou "synthétique"), tel J.Steiner, aux méthodes de la géométrie "analytique", l'influence de la péjoration culturelle de l'algèbre (sans, bien sûr, que cela enlève rien au renouveau apporté par les travaux de géométrie pure). Mais on notera aussi que ces effets se font sentir encore aujourd'hui, et d'une manière très prégnante, au sein de la noosphère – en particulier dans la recherche sur l'enseignement des mathématiques. Sur ce point, qui exigerait une étude séparée, nous ne signalerons ici que quelques indices: l'intérêt porté à la question des *word problems* ou *verbal arithmetic problems* (par la recherche américaine et, plus largement, par la recherche internationale située dans sa mouvance), corrélatif d'un manque d'intérêt (visible au faible volume des travaux qui lui sont consacrés) pour le thème du traitement algébrique des problèmes (en lequel, nous l'avons dit, Viète ou d'Alembert voyaient pourtant une révolution dans les mathématiques); le succès de théories

qui, d'une manière ou d'une autre, accordant à "la pensée" une extension et des modalités restreintes par la tradition idéologique et culturelle, restent fermement suspendues aux antiques conceptions "mentalistes" de la cognition, en supposant par exemple, comme il en va des "information processing models", l'élaboration par le sujet, préalablement à toute action, d'un schème mental exprimant l'ensemble des informations apportées par l'énoncé du problème, schème qui serait ensuite seulement exécuté (par opposition à un traitement séquenciel de l'information), etc.

11.6. Rien n'est sans doute plus révélateur de cette pression de la culture sur l'enseignement des mathématiques que les conceptions, qui dominent les analyses explicites produites dans la noosphère autant que les pratiques d'enseignement, concernant "la notion de nombre", "l'apprentissage du nombre", etc. Afin d'approfondir un peu plus ce thème, nous donnerons d'abord un contre-point de vue, partant pour cela de la question des nombres *négatifs*. Loin que ceux-ci surgissent du rapport à une réalité extramathématique, ils apparaissent au sein d'une pratique mathématique déterminée, la résolution d'équations. Le nombre entier naturel 3 est solution de l'équation $x = 3$. Or que se passe-t-il si l'on rencontre l'équation $x + 3 = 0$? Aucun entier naturel n'en est la solution. Il y a là un mystère, mais un mystère *intramathématique*. Et la clé de ce mystère n'est nullement à rechercher dans la réalité extramathématique. Il faudra en fait près de dix siècles, des algébristes arabes du IXe siècle jusqu'aux algébristes anglais du XIXe siècle et à Hermann Hankel (1867), pour que soient explicités les concepts pertinents: non pas "le nombre", mais celui de *système de nombres*, et le *principe de permanence* qui lui est associé. Puisque, en effet, la solution d'une telle équation ne peut être un nombre entier naturel, considérons (en adoptant ici un point de vue réaliste qui, techniquement, peut se traduire immédiatement selon un point de vue constructiviste) qu'il existe un système de nombres, satisfaisant les "lois usuelles" des nombres entiers (pour simplifier, nous ne préciserons pas le détail de ces lois), qui soient solutions des équations $x + n = 0$, où n est un entier naturel non nul quelconque. On notera n^* le "nombre" solution de l'équation $x + n = 0$, de sorte que $n^* + n = 0$. Comment calcule-t-on alors avec de tels nombres? Soit par exemple à effectuer $5 + 7^*$. On a: $(5 + 7^*) + 7 = 5 + (7^* + 7) = 5$. De l'égalité $(5 + 7^*) + 7 = 5$ on déduit alors que $(5 + 7^*) + 2 = 0$, soit donc que $5 + 7^* = 2^*$. De même, soit à calculer $5^* \times 7$. Partons de l'égalité $5 + 5^* = 0$. En multipliant par 7, il vient: $5 \times 7 + 5^* \times 7 = 0$, soit encore $5^* + 7 + 35 = 0$, d'où l'on déduit que $5^* \times 7 = 35^*$. De même encore, on obtiendra par de telles manipulations d'égalités la valeur de $5^* \times 7^*$. En multipliant $7^* + 7 = 0$ par 5^*, il vient $5^* \times 7^* + 5^* \times 7 = 0$. Comme $5^* \times 7 + 5 \times 7 = 0$, on obient enfin, par addition de 5×7 aux deux membres de l'égalité précédente, $5^* \times 7^* = 5 \times 7$. La fameuse *règle des signes*, qui n'est un casse-tête qu'au regard de la culture dominante, trouve ici son origine: elle est "forcée" en avant par une hypothèse du travail mathématique – le "principe de permanence" (dans le passage des entiers naturels aux entiers relatifs) des lois

qui gouvernent les entiers naturels.

11.7. C'est en ce point pourtant que la culture fait sentir sa pression. Au lieu de juger l'activité mathématique à ses critères propres, internes à une praxis spécifique, on n'a de cesse qu'elle n'ait été traduite dans les termes de la pensée "familière", à laquelle on suppose (sans que cette hypothèse soit elle-même nettement explicitée et formellement revendiquée par ses tenants) que toute "pensée" devrait pouvoir se réduire – sauf à renoncer à exister comme "pensée". On attendra donc ainsi, pour accorder au concept de "nombre négatif" son droit à une existence culturellement légitime, que la règle des signes puisse s'imager selon les termes d'un "modèle concret", ou, autrement dit, fasse l'objet d'une "représentation mentale". On cherchera à "comprendre" pourquoi "moins par moins égale plus"; et, faute d'un modèle adéquat qui emporterait aisément l'adhésion, l'enseignant devra se contenter d'user de son autorité pour faire prévaloir enfin un point de vue que résument bien ces deux vers attribués parfois au poète W.H. Auden:

Minus times minus is plus
The reason for this we must not discuss.

12. Un laminage culturel et idéologique

12.1. Cet écrasement culturel de l'algèbre, relayé au sein même de la noosphère, on l'a dit, et qui pèse sur les pratiques d'enseignement, se traduit dans les faits par au moins trois séries de conséquences didactiques, que nous examinerons tour à tour.

12.2. Tout d'abord, il fait perdre de vue ce fait que, si elle manque de dignité au regard des valeurs de la culture dominante, l'algèbre élémentaire est, mathématiquement, un authentique *instrument de création de concepts*. On a dit comment elle permettait de forger le concept de "système des nombres négatifs" (et donc de système des nombres relatifs); mais, semblablement, elle fournit l'outil qui permet de créer le concept de "système des nombres rationnels": a et b étant des entiers naturels (ou des entiers relatifs), et a étant non nul, l'équation $ax = b$ a une solution unique que l'on notera b/a. Si k est un entier non nul, les équations $ax = b$ et $kax = kb$ sont équivalentes, de sorte que $kb - ka = b/a$ (un même nombre rationnel a ainsi une infinité de noms de la forme b/a). Comme il en allait à propos des négatifs, les "règles" du calcul sur les rationnels, en outre, se déduisent alors entièrement de cette définition (qui ne fait appel à aucun "modèle" extramathématique). Pour déterminer $b/a + d/c$, considérons ainsi les équations $ax = b$ et $cy = d$. Multipliant la première par c et la seconde par a, on obtient, par addition membre à membre,

$$ac(x + y) = ad + bc\,,$$

équation qui montre que $b/a + d/c = (ad + bc)/ac$. Et de même pour la multiplication des rationnels. Par un procédé identique encore, on peut alors créer les nombres irrationels

solutions d'équations de la forme $x^2 = a$, et démontrer que l'on a: $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, etc. (voir Freudenthal 1973, pp. 224-232).

12.3. Seconde type d'effets: la même illusion culturelle a conduit à une confusion entre le concept et ses usages, en particulier de ses usages comme *outil de modélisation mathématique.* Cette confusion s'est récemment prévalue, en France, du principe épistémologique selon lequel un concept ne saurait être enfermé dans une définition formelle, mais équivaut en droit comme en fait *à la somme de ses usages.* Il nous faudra d'abord dire ici quelques mots de ce principe qui constitue, en effet, une conquête épistémologique essentielle. Il conduit à rejeter la notion de concepts constitués une fois pour toutes, d'une manière extemporanée et anhistorique (aussi bien dans l'histoire d'une discipline que dans l'histoire d'un individu), pour lui substituer la notion de *travail du concept*, qui met en avant ce fait essentiel qu'un concept n'est pas une chose inerte, mais une chose en devenir. Considérons à nouveau ici la question des nombres négatifs. Chez les algébristes italiens tel Cardano, ils apparaissent comme des choses – des "nombres" – sur lesquels on sait calculer, certes, mais dont on ne sait trop que faire – Cardano les appelle des "nombres fictifs" (*numeri ficti*, par opposition aux *numeri ueri*). A partir de là, on peut tenter, soit – négativement – de les éliminer comme fondamentalement inutiles (c'est encore ce que voudront faire certains mathématiciens, tel Augustus de Morgan, au XIX siècle), soit – positivement – de les apprivoiser, en cherchant quels usages on peut en faire; et la somme de tels usages n'est, en principe, à aucun moment close. (Pour un exemple élémentaire clairement présenté, voir l'annexe 5). Au regard de l'histoire des mathématiques savantes, et de leurs divers avatars sociaux (y compris les mathématiques enseignées), il n'y a là, au fond, rien que de très banal. Or, la position dominante vis-à-vis des "concepts", tout au moins en ce qui concerne l'enseignement, tend à ignorer le processus de travail des concepts (et se méprend donc sur le sens réel du principe épistémologique précité), pour se référer à des concepts supposés toujours déjà constitués, et qu'il s'agirait de "transmettre". Tout autant que le travail des concepts, ce point de vue correspond bien, cependant, à une réalité: il y a en effet une *réification culturelle* des concepts, qui les enferme, non en une définition, mais en un certain nombre de leurs usage possibles. Et, dans cette ligne, la "maîtrise" sera régardée, implicitement au moins, comme la maîtrise d'un certain nombre de ses usages culturellement reconnus.

12.4. Il suffit, pour l'apercevoir, de considérer, à rebours, un usage culturellement non classique. Nous prendrons ici un exemple qui vaut au moins pour le cas français. Soit à comparer les nombres rationnels 12/23 et 13/24. Si – comme c'est le cas aujourd'hui – l'élève ne dispose pour ce faire que des règles formelles de calcul sur les fractions, il devra pour conclure calculer 12×24 et 13×23, puis comparer ces nombres. Mais, utilisant un usage non classique des rationnels comme outil de modélisation, il pourrait aussi recourir

à ce fait: le nombre b/a représente la proportion de boules rouges dans une urne contenant b boules rouges et a boules en tout (ou encore: la proportion de filles dans une classe de a élèves contenant b filles); si l'on ajoute une boule, et si celle-ci est rouge, la proportion des boules rouges passe de b/a à $(b+1)/(a+1)$ et on sait par ailleurs qu'elle *augmente*; on a donc

$$b/a < (b+1)/(a+1)\,,$$

d'où l'on déduit immédiatement que $12/23 < 13/24$. Si le modèle ici mis en oeuvre était (culturellement) classique, l'incapacité à l'utiliser pour répondre à la question posée (des deux nombres 12/23 et 13/24, quel est le plus grand?) serait vraisemblablement regardée comme l'indice que l'élève "ne maîtrise" pas le concept de fraction". (Dans un autre univers culturel, donc, la quasi totalité des enseignants de mathématiques eux-mêmes devraient, selon ce critère, être regardés comme ne maîtrisant pas le concept de fraction). La réification culturelle des concepts tend ainsi à laminer l'idée du travail des concepts, et à oublier, au sein du processus didactique, la prise en charge effective (par l'enseignant) de la création de conditions didactiques permettant que ce travail, d'extension, de reprise, d'intégration, se réalise pleinement. (Elle fera oublier par exemple que la "maîtrise" du calcul vectoriel n'entraîne pas automatiquement la maîtrise de l'emploi du calcul vectoriel pour modéliser mathématiquement un système de forces).

12.5. Au demeurant, ce n'est que dans la problématique exposée plus haut (comme contre-point de vue) que l'on peut parler véritablement de modélisation. Dans les conceptions dominantes, les emplois modélisants d'un concept mathématique ne sont pas vus comme tels, mais comme des "aspects" du concept, indispensables pour permettre au sujet d'attacher un sens au concept, ainsi qu'il apparaît par exemple (on pourrait sur ce thème multiplier indéfiniment les citations) dans le passage suivant d'une étude consacrée aux difficultés d'apprentissage des opérations arithmétiques à l'école élémentaire: "... this still leaves the question of what meanings the pupils can attach to the operations. For 6×4, it is easy to think of 6 lots of 4 objects (repeated addition), and this can be extended to include repeated addition of measures (e.g. 6 lengths of string each 4.1 metres long). To find a situation modelled by 6.2×4.1, however, one has to go to a conceptually very different context, such as the area of a rectangle, unit price x quantity, speed x time, or enlargement." (Bell et al., p. 130). En fait, l'apparition de ce qu'on peut bien baptiser modèles – mais qui n'en sont guère dans la mesure où ils apparaissent comme consubstanciellement liés au concept (dont ils sont regardés comme des éléments constitutifs) –, ne répond, dans la plupart des cas, qu'à une injonction culturelle étrangère à la praxis mathématique: on n'aurait compris un concept mathématique qu'à partir du moment où on s'est familiarisé avec l'ensemble, culturellement défini *et limité*, de ses emplois modélisateurs – conception qui "gèle" le travail du concept et ne permet guère de poser pleinement le problème, en droit

comme en fait toujours ouvert, de ses emplois. Henri Lebesgue, qui fut un mathématicien éminent tout autant qu'un observateur attentif des choses de l'enseignement, a écrit là-dessus des lignes que le lecteur pourra, de ce point de vue, fructueusement méditer: on y verra que même les emplois des entiers *naturels* ne semblent aller de soi que par l'illusion d'une transparence culturellement acquise (voir l'annexe 6).

12.6. Ajoutons encore que le point de vue de la modélisation, auquel on s'est référé plusieurs fois, permet de rappeler quelques évidences qui pourraient dissiper bien des "mystères": que, par exemple, si tout dans une situation à modeliser ne trouve pas sa traduction au sein du modèle mathématique (on ne retient que les éléments jugés "pertinents"), inversement, tout dans le modèle mathématique n'a pas nécessairement d'interprétation au sein de la situation modélisée; et qu'on peut donc par exemple mathématiser telle situation à l'aide du système des nombres relatifs (comme la position d'un point sur un axe muni d'une origine) sans que toutes les manipulations qu'on peut être amené à faire subir aux nombres relatifs (par exemple en les multipliant) s'interprète ("concrètement") dans la situation étudiée – pas davantage que tel procédé de résolution de tel type d'équation différentielle modélisant tel type de phénomène physique ne s'interprète ordinairement dans les termes du phénomène physique étudié – car il y a une logique *sui generis* du modèle mathématique.

12.7. Ainsi l'algèbre se trouve niée comme outil de création de concepts, et les concepts eux-mêmes se voient figés en telle sorte que le travail de mathématisation qu'ils permettent (et qui les enrichit comme concepts) n'est pas nettement identifié comme tâche épistémologiquement et didactiquement *ouverte*. Or – troisième type d'effets –, ce double laminage tend à refouler l'algèbre élémentaire de la part vive de l'activité mathématique, pour la réduire, dans le cadre formel que nous avons décrit, à une activité "automatique", et en tout cas autonome, sans réelle portée de création. Il y a là les ingrédients d'une situation de marginalisation épistémologique de l'algèbre, situation dont on examinera maintenant les possibilités d'évolution dans la ligne du contre-modèle esquissé tout au long des analyses précédentes.

13. Enseigner l'algèbre?

13.1. Ces analyses permettent de prendre la mesure de quelques-unes des difficultés que peut proposer un enseignement de l'algèbre qui échappe aux réductions auxquelles la transposition didactique l'a jusqu'ici soumis – jusqu'à ne lui accorder plus que la portion congrue dans l'enseignement français d'aujourdh'hui. Dans la situation actuelle, un certain nombre de travaux ont mis en évidence – ce que les enseignants savent bien, d'expérience familière – la difficulté éprouvée par les élèves à – par exemple – traduire par une équation (ou un système d'équations, etc.) une situation-problème présentée sous forme verbale

(celle d'un "word problem"). Or on se trouve là devant une situation verrouillée: cette difficulté réelle ne peut guère être prise en compte, dans la pratique de l'enseignement, dans la mesure précisément où l'algèbre est regardée a priori comme sans grande valeur, sans dignité, indigne du temps que nécessiterait en fait la double exigence didactique consistant à poser le problème de ses emplois et à créer les conditions d'une maîtrise de ses emplois.

13.2. Retournons ici un instant à l'idée d'une initiation "fonctionnelle" à l'algèbre élémentaire, telle qu'on l'a évoquée plus haut. L'une des conditions nécessaires à une telle approche est, bien entendu, que soit créé et reconnu (au moins) un domaine d'intervention de l'outil algébrique *disponible très tôt* dans le cursus des études, et qui puisse intervenir pourtant dans cet apprentissage à l'instar du domaine mis en place ultérieurement avec le calcul différentiel et intégral élémentaire (par exemple). On a rencontré plus haut deux domaines possibles: l'un emprunté à la tradition de l'arithmétique élémentaire, celui des "problèmes concrets" – celui, donc, de la modélisation (algébrique) de situations ou de systèmes divers (liés à la vie quotidienne, ou à différents secteurs de l'étude de la nature, etc.); l'autre, intramathématique, inspiré de certaines pratiques des mathématiques savantes, dans lequel l'*objet d'étude* est constitué du système des nombres entiers naturels.

13.3. L'articulation d'un premier apprentissage de l'algèbre autour de l'un ou de l'autre de ces domaines d'intervention potentiels pose un ensemble considérable de problèmes d'*ingénierie didactique*, dont les analyses précédentes permettent de se faire une première idée. Nous ne retiendrons ici que l'exemple du second domaine mentionné, dont nous avons donné plus haut une illustration ("la somme de deux nombres impairs successifs est un multiple de 4"). La mise en place de ce cadre fonctionnel d'apprentissage de l'algèbre a été tentée dans une recherche menée à l'IREM d'Aix-Marseille par Michel Jullien et l'auteur. Elle se heurte à un certain nombre de contraintes didactiques que nous ne ferons ici que signaler.

13.4. Tout d'abord, la constitution de ce domaine comme secteur des mathématiques enseignées suppose qu'on lui donne une place qui, en fait (et contrairement au domaine des "problèmes concrets"), n'a jamais véritablement existé dans l'enseignement. On est donc affronté à un problème de création didactique, qui soulève des difficultés écologiques déterminées. La structure du temps didactique doit être remaniée en conséquence, pour faire droit à un "tout structuré" qui comporte une logique certaine, mais qui entre en conflit avec l'organisation des mathématiques enseignées devenue traditionnelle. C'est ainsi par exemple que le processus adopté dans la recherche mentionnée et qui, dans une première étape, met d'abord en place ces outils que constituent les équations du premier degré et le calcul algébrique élémentaire, puis enchaîne sur une second étape en laquelle ces outils sont alors mis en oeuvre pour créer – comme on l'a dit – le système des nombres rationnels, entre en conflit avec une organisation dans laquelle l'introduction des différents systèmes

de nombres se trouve depuis longtemps déconnectée de l'outil algébrique.

13.5. La principale difficulté pour faire reconnaître à ce domaine un "droit à l'existence didactique" tient évidemment aux effets, chez les enseignants eux-mêmes, des pressions culturelles longuement évoquées. Etant donnée la hiérarchie des valeurs dans laquelle on doit opérer, comment faire accepter comme légitime – dès lors que l'on sort d'un cadre revendiqué et accepté comme strictement expérimental – l'usage du temps, didactiquement si précieux et toujours mesuré, nécessaire à l'apprentissage d'un emploi de l'outil algébrique qui ne conduira guère, du point de vue de la manipulation formelle des expressions algébriques – critère que la tradition d'enseignement fait accepter comme point de vue dominant, voire unique –, qu'à des manipulations littérales "simplettes"? Ainsi, un problème tel le suivant

> *"Montrer que la somme des carrés de trois entiers impairs successifs, augmentée de 1, est un multiple de 12",*

qui se situe sans doute *à la limite* de ce que l'on peut espérer à la fin d'un premier apprentissage fonctionnel de l'algèbre, ne supposera pourtant, du point de vue formel, qu'un calcul relativement banal, i.e. la démonstration d'une égalité du type

$$(2a-1)^2+(2a+1)^2+(2a+3)^2+1=12(a^2+a+1).$$

13.6. Soulignons au passage une difficulté qui paraît a priori de moindre importance. L'étude algébrique la plus élémentaire des nombres naturels (ou relatifs), telle que nous l'avons illustrée, se prolonge "normalement" par les premiers rudiments de la théorie élémentaire des nombres. On pourra comparer de ce point de vue le problème examiné ci-dessus au problème suivant

> *"Les nombres a et b étant premiers entre eux, montrer que les nombres $a+b$ et a^2+b^2-ab ont pour diviser commun 1 ou 3".*

(Le premier pas de l'étude est ici de réécrire l'expression a^2+b^2-ab sous la forme $(a+b)^2-3ab$, transformation qui met en jeu le calcul algébrique élémentaire, avant de procéder à une analyse supposant l'emploi de résultats de base en théorie des nombres: si $d>1$ divise $a+b$, d ne divise ni a ni b, puisque a et b son premiers entre eux, et divise $3ab$, puisqu'il divise $(a+b)^2-3ab$, donc divise 3, de sorte que $d=3$; etc.) Or, alors que la période contemporaine voit un regain d'intérêt pour la théorie des nombres qui va bien au-delà des seuls spécialistes, il faut constater que l'étude de ses thèmes a pratiquement disparu des programmes des collèges comme des lycées, où elle figurait encore il y a peu, et cela d'une manière bien paradoxale si l'on considère leur réactualisation par l'introduction récente ou à venir du point de vue algorithmique dans l'enseignement des mathématiques...

13.7. Mais, corrélativement à l'adoption d'une perspective fonctionnelle, une autre difficulté surgit. Même dans le cadre d'un apprentissage fonctionnel du calcul algébrique, le processus didactique doit ménager une place aux exercices d'entraînement au calcul, aux "drills", c'est-à-dire à des exercices qui soient, sinon du "calcul-pour-le-calcul", du moins du "calcul-pour-le-calcul en vue de l'emploi (fonctionnel) du calcul". Or on bute sur un problème de ressources temporelles limitées, qui renvoie finalement, comme le précédent auquel il est lié, et plus généralement, à un problème majeur de choix d'enseignement: peut-on, au sein de la société, dégager un consensus autour de l'importance de la maîtrise de l'outil algébrique et de sa place corrélative dans l'enseignement obligatoire? C'est là une question qui dépasse, par sa nature même, le registre de la recherche et la "compétence sociale" du didacticien. En tant que simple observateur des choses de l'enseignement, il me semble que, pour ce qui concerne la France, un tel consensus n'a que peu de chances de se produire dans un avenir proche.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CHEVALLARD Y. (1985a), *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*, Petit x, 5, 51-94.

CHEVALLARD Y. (1985b), *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage, Grenoble. Deuxième édition augmentée (1991).

FREUDENTHAL H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, D.Reidel, Dordrecht.

TONNELLE J. (1979), *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, IREM d'Aix-Marseille – IREM de Bordeaux.

MATERIELS BIBLIOGRAPHIQUES

BELL A., FISCHBEIN E., GREER B. (1984), *Choice of Operation in Verbal Arithmetic Problems: the Effects of Number Size, Problem Structure and Context*, Educational Studies in Mathematics **15**, 129-147.

CHOQUET G. (1964), *L'enseignement de la géométrie*, Paris, Hermann.

LAPLACE P.S. (1812), *Leçons de mathématiques données à l'Ecole normale en 1795*, Journal de l'Ecole polytechnique, septième et huitième cahiers, tome II.

LEBESGUE H., *La mesure des grandeurs*, Blanchard, Paris, 1975.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1985), *Collèges – Programmes et instructions*, BO et CNDP, Paris.

MORTREUX X., MORTREUX O. (1925), *Nouvelle arithmétique des écoles primaires*, Belin, Paris.

NEWTON I. (1707), *Arithmétique universelle*, traduite du latin en français avec des notes explicatives par Noël Beaudeux, Bernard, Paris, 1802.

SMITH D.E., LATHAM M.L. (1925), *The Geometry of René Descartes*, with facsimile of the first edition, Dover, 1954.

VAUZELARD J.L. (1630), *La nouvelle algèbre de M. Viète*, Fayard, Paris, 1986.

ANNEXE 1

Le nouveaux programmes de mathématiques des collèges français. Ministère de l'éducation nationale 1985, pp. 77-91.

MATHÉMATIQUES

1. Nature et objectifs

L'enseignement des mathématiques comporte deux aspects:

- Il apprend à relier des observations du réel à des représentations: schémas, tableaux, figures.
- Il apprend aussi à relier ces représentations à une activité mathématique et à des concepts.

Cette démarche permet de bâtir des mathématiques à partir des problèmes rencontrés dans plusieurs disciplines et, en retour, d'utiliser les savoirs mathématiques dans des spécialités diverses.

Elle accorde una grande place à l'activité de construction, de réalisation de dessins, de résolution de problèmes, d'organisation et de traitement de données, de calculs ... Cela permet aux élèves de mieux prendre en compte le caractère "d'outil" de mathématiques.

Elle concourt à la formation intellectuelle de l'élève et doit notamment:

- Développer les capacités de raisonnement: observation, analyse, pensée déductive:
- Stimuler l'imagination;
- Habituer l'élève à s'exprimer clairement, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral;
- Affermir les qualités d'ordre et de soin.

Ainsi, l'enseignement des mathématiques au collège favorise le développement des capacités de travail personnel de l'élève, et de son aptitude à chercher, à communiquer, et à justifier ses affirmations.

2. Instructions générales. Choix des méthodes

A. Progression de l'enseignement

Il existe, pour chaque classe, des dominantes de contenus et d'activités qui rendent possible une bonne organisation du temps disponible et permettent de réaliser la cohérence et la progression de l'enseignement. Il importe, en effet, d'éviter

l'émiettement et de faciliter la bonne structuration des savoirs et des méthodes.

Une distinction claire doir être établie entre:

Les activités prescrites par le programmes, qui doivent être aussi riches et diversifiées que possible;

Les connaissances exigibles, qui sont beaucoup plus restreintes que ce qui se fait en classe;

Les activités complémentaires éventuelles sur tel ou tel point.

Chaque sujet mathématique n'est pas un bloc d'un seul tenant, il n'a pas être présenté de façon exhaustive. Il convient au contraire de faire fonctionner à propos de nouvelles situations, et autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision, les notions et "outils" mathématiques antérieurement étudiés; il convient également de préciser à chaque étape de l'apprentissage quelles connaissances sont désormais en place; il convient enfin de mettre en oeuvre des exercices de synthèse pour coordonner des acquisitions diverses.

L'étude d'une notion à un niveau déterminé implique qu'elle sera désormais, et le plus souvent possible, intégrée systématiquement à l'activité mathématique.

B. Méthodes

1. Une appropriation mathématique, pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations: il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes.

Pour atteindre ces objectifs, les séquences courtes (information donnée par le professeur, exercice d'application directe, réponse et commentaire) doivent se combiner avec des séquences plus longues. Celles-ci sont centrées sur l'étude de situations mettant en jeu les "outils" visés et utilisés, selon les cas, comme terrain d'observation ou comme champ d'intervention des connaissances. Ces conditions sont essentielles si l'on veut, d'une part, amener les élèves d'une classe à la comprehension intuitive des concepts et à leur mise en oeuvre appropriée dans des situations simples, d'autre part, leur permettre d'approfondir et d'enrichir leur formation mathématique.

Par exemple, pour l'acquisition des techniques opératoires sur les nombres décimaux, il ne suffit pas de décrire des placements de virgule et d'adjoindre éventuellement de zéros adéquats. Il est nécessaire d'étudier des situations dans lesquelles on a besoin d'opérer sur des nombres décimaux, et d'écrire un même décimal sous plusieurs formes (cela s'est déjà fait à l'école élémentaire, mais doit être amélioré au collège). Une construction de courbe point par point peut être ainsi l'occasion d'une meilleure assimilation des techniques opératoires.

2. On devra donc privilégier l'activité de chaque élève. Mais on n'oubliera pas

la nécessité d'une pédagogie n'assujettissant pas tous les élèves aux mêmes rythmes, sans que soit délaissé l'objectif d'acquisitions communes.

Dès lors, les professuers vont avoir à choisir des situations créant un problême, dont la solution fera intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des "outils" qui permetteront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente.

Les activités choisies doivent développer la capacité de se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. Elles doivent aussi:

Permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que des connaissances solidement acquises par tout le monde;

Créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures;

Rendre possible la mise en jeu des outils prévus;

Fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement. On y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.

Le professeur doit donc procéder avec une attention particulière au choix pertinent des situations à étudier. Il doit aussi veiller à bien organiser les phases du déroulement de l'activité. Une condition première est de prévoir une durée suffisante. Pour le développement complet de l'activité formatrice, de la phase initiale à la mise en place des connaissances désorma's considérées comme acquises, l'échelle de temps est en heures, voire en semaines, comme dans l'étude de la proportionnalité.

C'est à ce prix que l'on peut:

Habituer à l'art d'expérimenter et à celui de conjecturer, donc d'entraîner à chercher;

Ménager des séquences déductives motivantes, de plus en plus prolongées, nombreuses et de difficultés progressives au long des quatre années du collège;

Souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématieus en les enseignant en interaction avec les autres disciplines et avec la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...) et en utilisant les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel...).

3. Le professeur doit toujours distinguer l'essentiel de l'accessoire, et percevoir les relations entre les diverses parties. Il lui fait encore prendre la distance nécessaire par rapport à ses propres connaissances, car son métier ne consiste pas à amener ses élèves, sur un sujet donné, à un niveau voisin du sien. Il sait identifier et prévoir les

subtilités qu'il est préférable de taire, les démarches rigoureuses qui sont à remplacer par des arguments accessibles aux élèves, les exigences prématurées de formulation qui entravent une bonne progression.

. 4. Le professeur est attentif au langage et aux signification diverses d'un même mot. Il évite de fixer d'emblée le vocabulaire et le notations: seuls peuvent en profiter, en effet, les élèves qui ont une expérience préalable du sujet ou de fortes capacités d'anticipation. Dans le cours du traitement d'une question, vocabulaire et notation s'introduisent selon un critère d'utilité: ils sont à considérer déjà comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ.

Le professeur a le souci de faire mieux lire et mieux comprendre aux élèves un texte mathématique. Ce souci, capital en sixième, ne doit jamais être abandonné ensuite.

Un moyen efficace pour faire admettre la nécessité d'un langage précis, en évitant que cette exigence soit ressentie comme arbitraire par les élèves, est le passage des instructions pour l'execution par autrui (par exemple, décrire pour la faire reproduire une figure un peu complexe) ou lorsqu'il programme un ordinateur pour un traitement voulu, que l'obligation de précision doit lui apparaître comme une évidente nécessité.

3. Programmes

Pour toutes les classes, les connaissances acquisés antérieurement sont mobilisées et utilisées le plus souvent possible.

CLASSE DE SIXIÈME

Le travail effectué doit permettre à l'élève d'acquérir et de parfaire l'usage d'instruments de mesure et de dessin, de développer le calcul mental et, de façon conjointe, d'utiliser rationnellement des calculatrices de poche, de s'initier progressivement au raisonnement déductif. L'emploi d'un ordinateur peut accompagner utilement ces activités.

1. Travaux géométriques

1. Reproduction de figures planes simples. Comparaison d'aires planes.
2. Parallélépipède rectangle: description, représentation en perspective, patrons.
3. Dans les plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite, en exploitant des problèmes nécessitant des manipulations, des dessins et des mesures:

   Construction de l'image: d'un point, d'une figure simple.

Mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires.

Exemples d'utilisation de ces propriétés.

Construction d'axes de symétrie (médiatrice, bissectrice...).

Construction de triangles isocèles, de quadrilatères possédant des axes de symétrie (rectangles, losanges...).

Énoncé et utilisation de quelques propriétés.

Caractéristiques des figures précédentes.

2. Travaux numériques

En dehors du paragraphe 7, les nombres utilisés sont *positifs*.

1. Techniques opératoires (mentales ou écrites) sur les nombres entiers et décimaux. Procédés de calcul approché: troncature et arrondi; ordre de grandeur d'un résultat.
2. Écriture fractionnaire de décimaux et opérations $+, -, \times$. Critéres de divisibilité par 2, 3, 5, 9.
3. Quotient de deux décimaux, écriture $\frac{a}{b}$; approximations de ce quotient.

   Multiplication d'un décimal par $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers ($b \neq 0$).
4. Initiation aux écritures littérales (exemples: formules d'aires...).
5. Rangement de nombres.
6. Équations du type

$$23 \times \square = 471,5 \text{ ou } \frac{205}{\square} = 8,2.$$

7. Exemples introduisant les nombres relatifs à partir de problèmes variés.

   Sommé et différence de deux entiers relatifs simples. Exercices concernant le repérage d'un point sur une droite orientée munie d'une origine et régulièrement graduée.

   Coordonnées d'un point du plan, en repère orthogonal.

3. Organisation et gestion de données. Fonctions

Exemples issus d'activités:

1. A base numérique:

   Application d'un pourcentage à une valeur; relevés statistiques; opérateurs constants d'une calculatrice.
2. A base géométrique:

   Calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, du volume d'un parallépipède rectangle, de la longueur d'un cercle.

On se servira de ces exemples, selon les cas, pour:

Décrire la situation par un tableau ou par des représentations graphiques.

Reconnaître, s'il y a lieu, une proportionnalité.

Déterminer une quatrième proportionnelle.

Effectuer un changement d'unité.

CLASSE DE CINQUIÈME

Comme en classe de sixième, le travail effectué doit permettre à l'élève d'acquérir et de parfaire l'usage d'instruments de mesure et de dessin, de développer le calcul mental et, conjointement, d'utiliser rationnellement des calculatrices de poche, de s'initier progressivement au raisonnement déductif. L'emploi d'un ordinateur peut accompagner utilement ces activités.

Son usage permettra également de dégager progressivement les notions de codage et d'algorithme.

1. Travaux géométriques

1. Prismes droits simples et cylindre de révolution:

   Description, représentation en perspective, patrons.

   Aperçus élémentaires sur le parallélisme et l'orthogonalité dans l'espace.

2. Dans le plan, transformation de figures par symétrie centrale en exploitant des situations-problèmes nécessitant des manipulations, des dessins et des mesures:

   Construction de l'image: d'un point, d'une figure simple.

   Mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires.

   Exemples d'utilisation de ces propriétés.

   Caractérisations angulaires du parallélisme.

   Construction et caractérisation du parallélogramme.

   Exemples d'autres figures simples ayant centre(s) et axe(s) de symétrie.

3. Triangle: somme des angles, aire, construction du cercle circonscrit.

2. Travaux numériques

1. Nombres positifs:

   Sur les nombres entiers et décimaux: conventions et priorités opératoires; étude de $k(a+b)$ et $k(a-b)$.

   Comparaison et addition de deux nombres en écriture fractionnaire de même

dénominateur; multiplication de deux nombres en écriture fractionnaire.

2. Nombres relatifs en écriture décimale:
   Comparaison et rangement.
   Addition et soustraction.
   Réduction de sommes algébriques.
3. Équations numériques du type $a + x = b$ ou $ax = b(a \neq 0)$.

3. Organisation et gestion de données. Fonctions

Exemples de fonctions, avec:

Description, traduction en tableaux ou par des représentations graphiques.

Reconnaissance, s'il y a lieu, d'une proportionnalité.

Ces exemples seront notamment issus d'activités:

1. A base numérique: Calcul d'un pourcentage, d'une vitesse moyenne; relevés statistiques; activités proposées en paragraphe 2, ci-dessus.
2. A base géométrique:
   Échelles.
   Calcul: de l'aire d'un parallélogramme, d'un triangle, du volume d'un prisme droit, de l'aire d'un disque, de l'aire et du volume d'un cylindre de révolution.

CLASSE DE QUATRIÈME

Le travail effectué doit permettre à l'élève de parfaire l'usage des instruments de mesure et de dessin, d'acquerir définitivement des techniques opératoires de base (mentales ou écrits) et, conjointement, d'utiliser rationnellement des calculatrices de poche, de s'entraîner progressivement au raisonnement déductif.

L'utilisation d'un ordinateur peut accompagner utilement ces activités.

Son usage permettra de dégager progressivement les notions de codage et d'algorithme.

1. Travaux géométriques

1. Dans le plan, projection sur une droite, selon une direction:
   Conservation du milieu par projection; configurations triangulaires prenant appui sur cette propriété.
   Projection orthogonale; cosinus d'un angle comme opérateur de projection orthogonale.
2. Problèmes de plus courte distance: Inégalité; distance d'un point à une droite.

3. Triangle:

   Médianes et centre de gravité; hauteurs et orthocentre; bissectrices et cercle inscrit. Triangle rectangle: cercle circonscrit; propriété de Pythagore et sa réciproque.

4. Sphère; section par un plan; aire et volume.

5. Dans le plan, transformation de figures par translation ou rotation; translation et vecteur; polygones réguliers.

2. Travaux numériques

1. Nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire:

   Multiplication; règle des signes.

   Division; approximations décimales d'un quotient.

   Addition en écriture fractionnaire.

   Puissance entières d'exposant positif ou négatif.

   Écriture des nombres en notation scientifique et en notation ingénieur; ordre de grandeur d'un résultat.

   Conventions et priorités opératoires.

2. Généralisation des études précédentes aux calculs portant sur des écritures littérales.

   Développement d'expressions du style $(a+b)(c+d)$.

   Exemples simples de factorisation. Réduction de sommes algébriques.

3. Ordre:

   Comparaison de nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire.

   Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre.

4. Résolution de problèmes aboutissant à des équations, à des inéquations du premier degré à una inconnue.

3. Organisation et gestion de données. Fonctions

1. Applications linéaires et proportionalité:

   Représentation graphique d'une application linéaire.

   Notion de coefficient directeur, de pente.

2. Exploitant de données statistiques:

   Fréquences relatives et leur expression en "pour cent".

   Effectifs cumulés, fréquentés cumulées.

3. *Application aux percentage et aux indices (base 100 pour...):*

   Mise en oeuvre de la proportionnalité sur des grandeurs (vitesse en km/h, débit...).

CLASSE DE TROISIÈME

Le travail effectué doit permettre à l'élève de s'approprier solidement l'usage des instruments de mesure et de dessin, d'acquérir définitivement des techniques opératoires (mentales ou écrits) et, conjointement, d'utiliser avec sûreté des calculatrices de poche, de s'entraîner constamment au raisonnement déductif.

L'utilisation d'un ordinateur peut accompagner utilement ces activités.

1. Travaux géométriques

1. Énoncé de Thalès relatif au triangle.

   Application à des problèmes de construction (moyenne géométrique...).

   Pyramide et cône de révolution: volume, section par un plan parallèle à la base.

   Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur longueurs, aires et volumes, masses.

2. Angles:

   Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

   Angle inscrit dans un cercle et angle au centre.

3. Dans le plan, construction de transformées de figures par composition de deux translations; de deux symétries centrales; de deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires.

4. Translation et vecteur. Égalité vectorielle:

   Dans le plan rapporté à un repère: effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point; coordonnées d'un vecteur.

5. Distance de deux points en repère orthonormal;

   Équation d'une droïte sous la forme:

$$y = mx;\ y = mx + p;\ x = p\,.$$

Coefficient directeur; parallélisme, orthogonalité en repère orthonormal.

6. Addition vectorielle.

2. Travaux numériques

1. Écritures littérales:

   Factorisation d'expressions de la forme:

$$a^2 - b^2; a^2 + 2ab + b^2; a^2 - 2ab + b^2$$

   (a et b désignent des formes simples de nombres exprimés dans les différentes écritures déjà rencontrées).

2. Calcul élémentaires sur les redicaux (racines carrées):
   Produit et quotient de deux radicaux.
   Puissance d'ordre 2 ou 4 d'un radical.
3. Équations et inéquations du premier degré:
   Méthodes graphiques de résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à coefficients numériques.
   Méthodes de résolution d'un système de deux équations ou inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.
   Exemples variés de problèmes se ramenant au premier degré.

3. Organisation et gestion de données. Fonctions

1. Application affines: représentation graphique d'une application affine.
2. Exploitation de données statistiques: Moyenne; moyennes pondérées; médiane.
3. Mise en oeuvre de la proportionnalité sur des grandeurs-quotients ou sur des grandeurs-produits.
4. Résolution d'équations par essais et corrections successifs.
5. Analyse (et construction) d'algorithmes comme suite d'instructions aboutissant à la résolution d'un problème donné. Application numérique à l'aide d'un ordinateur.

ANNEXE 2

Réponses de 24 enseignants de mathématiques des collèges à la question:

"Une personne ayant fait des études scientifiques mais qui a perdu contact avec l'enseignement secondaire actuel vous demande ce que l'on enseigne aujourd'hui, en algèbre, au collège. Que lui répondez-vous?"

1)

- *Utilisation et sens d'utilisation des lettres*
- *Résolution des équations et inéquations 1er degré*
- *Identités remarquables*
- *Résoudre des problèmes faisant appel à des factorisations et des développements*
- *Fractions*
- *Racines carrées*

2)

- *Ecriture d'expressions algébriques (calculs, transformations, rôle des parenthèses)*

3)

- *Peu de différence avec le passé*
- *On calcule avec des décimaux*
  avec des fractions, des rationnels
  avec des irrationnels calcul littéral
- *On essaie de traduire mathématiquement des problèmes concrets sous forme d'équations à résoudre*

4)

- *Résolution d'équations*
- *Identités remarquables, etc. ...*

5)

- *Etude des opérations* $(+, -, \times, :)$ *dans l'ensemble des nombres réels*
- *Factorisation, développement*
- *Identités remarquables*
- *Puissances ...*

6)

- *On essaie de dégager, au travers de situations différentes ("mathématiques" ou éventuellement autres) des analogies de fonctionnement. Ceci étant dit, on doit retrouver, en fin de compte, les résultats de l'algèbre "classique": équations, factorisations...*

7)

- *Introduction progressive de variables (lettres représentant les nombres)*
- *Presque plus de notions ensemblistes*

8)

- *Calculs algébriques, fonctions, équations*

9)

- *Développements, factorisations, puissances*

10)

- *Les ensembles de nombres; les opérations, leurs propriétés*
- *Equations à une inconnue, linéaires à deux inconnues; quelques bricoles sur les ensembles*

11)

- *Equations et inéquations du premier degré "Factoriser – Développer"*

12)

- *Etude des nombres relatifs (calcul dans)*
- *équations du 1er degré*
- *Etude des nombres réels*
- *Etude des fractions, identités remarquables*

13)

- *Géométrie*
- *Produit remarquable*
- *Résolution d'équations*
- *Factorisation*
- *Développement*

14)

- *Calculs sur les polynômes*
- *Factorisation – Développements*
- *Etude de fonctions simples*

15)

- *Des cours très construits, où tout est parfaitement clair et assimilable*
- *Constructions de type modulaire. Elaboration des règles très dépendantes les unes des autres*
- *Acquisition d'automatismes*
- *Ce cours requiert des bases solides, et bien assimilées. Pour l'élève il correspond souvent aux situations d'échec*
- *Cours assimilables à l'outil mathématique*
- *Cours très clarifié par les math. modernes*

16)

- *Ensembles, inclusion, intersection, réunion, propriétés des opérations: équations, nombres rationnels (fractions)*
- *Identités remarquables*

17) Algèbre

Règle des signes
Valeurs absolues
Racines carrées
Fractions
Identités remarquables
Factorisation
Fonctions du 1er degré
Equations du 1er degré et systèmes d'équations et d'inéquations
Inéquations

18) L'algèbre au collège:

- *Calcul algébrique avec initiation progressive au maniement des lettres:*
* *réduire, ordonner, factoriser des polynômes*
* *mise en équation d'un problème*
* *résoudre des équations et inéquations du 1er degré à une inconnue*

19)

- *Résoudre des problèmes du 1er degré et gérer des données simples, dans l'ensemble des réels*

20)

- *Résolution d'équations, d'inéquations (et système) du 1er degré à plusieurs inconnues*
- *Eventuellement du second degré sans formalisme*

21)

- *Les techniques de calcul algébrique: usage des parenthèses, règles opératoires, identités remarquables, équations du 1er degré ...*

22)

- *Calcul numérique sur les nombres réels*
- *Propriétés des opérations dans R et calcul algébrique. Equations et inéquations du 1er degré à une inconnue*
- *Vecteur, géométrie dans un repère cartésien*
- *Angles géométriques, trigonométrie*

23) Algèbre au collège:

- *calculs dans R, avec développements, factorisations, équations, inéquations*
- *étude de fonctions affines et linéaires*

24) Je pose la question: A quel niveau? Suivant la réponse de la personne je précise:

* *en 6ème on fait:*

* *en 5ème on fait:*

* *en 4ème on fait:*

* *en 3ème on fait:*

ANNEXE 3

Problèmes de fausse position. Ext. Mortreux (1925), p. 130.

Méthode de supposition. – Problèmes. – 1169. – *Un négociant achète une pièce de drap à raison de 40 fr. le mètre. Il en revend le quart à* $54^{fr},40$ *le mètre, 1/5 à 50 fr. le mètre et le reste à 50 fr. le mètre. Il retire de cette vente un bénéfice de 1476 fr. Combien y avait-il de mètres dans la pièce de drap?*

Analyse. – Si la longueur de la pièce devenait 2, 3, 4 ... fois plus grande ou plus petite, le bénéfice deviendrait 2, 3, 4 fois plus grand ou plus petit, c'est-à-dire que **la longueur de la pièce est proportionnelle au bénéfice qu'on retire de sa vente.**

Solution: **Supposons** donc que la pièce de drap ait 20 m. ... 20 étant le p.p.c.m. les dénominateurs 4 et 5. **La longueur de la pièce** contiendra 20 **m** *autant de fois que le bénéfice total contient le bénéfice réalisé sur des 20* m.

1. *Bénéfice total:* 1476 fr.
2. *Bénéfice sur* 20 m.:

a) Sur le quart ou sur 5 m. $\begin{cases} \text{Sur 1 m.: } 54^{fr}.40 - 40^{fr} = 14^{fr}.40. \\ \text{Sur 5 m.: } 14^{fr}.40 \times 5 = 144 : 2 = 72fr. \end{cases}$

b) Sur $\dfrac{1}{3}$ ou 4 m. $\begin{cases} \text{Sur 1 m.: } 56^{fr} - 40^{fr} = 16fr. \\ \text{Sur 4 m.: } 16^{fr} \times 4 = 64fr. \end{cases}$

c) Sur le reste: $\begin{cases} \text{Sur 1 m.: } 50^{fr} - 40^{fr} = 10fr. \\ \text{Sur } (20m. - 0m) \text{ ou } 11m : 10^{fr} \times 11 = 110fr. \end{cases}$

d) En tout: $72^{fr} + 64^{fr} + 110^{fr} = 248fr.$

Réponse: **Longueur de la pièce:** $20^m \times \dfrac{1476}{246} = 20^m \times 6 = 120m.$

Autre méthode. – **La longueur de la pièce** est le quotient du bénéfice total (1476 fr.) par le bénéfice moyen sur 1 m.

*1170. – Une marchande achète des oeufs à 36 fr. le cent. Elle en vend la moitié à $0^{fr},54$ l'un et le reste à raison de 3 pour $1^{fr}.30$. De cette manière elle gagne $226^{fr}.40$ Combien a-t-elle vendu d'oeufs (*C. Compl.*)

*1171. – On a acheté des oeufs a $4^{fr}.50$ la douzaine: on en revend 1/3 à 6 fr. la douzaine: 1/3 à $5^{fr}.40$ et le reste a $4^{fr}.30$. Le bénéfice realisé est de 613 fr. Combien d'oeufs avait-on achetés? (E.P.S.)

*1172. – On a payé 2880 fr. pour un certain nombre de mètres de velours et de satin. Le nombre de mètres de satin est double de celui de velours; sachant que le mètre de satin coûte 30 fr. et celui de velours 36 fr., combien a-t-on eu de mètres de chaque espèce? (E.P.S.)

*1173. – Une pièce de velours devait être vendue à 36 fr. le mètre. Par suite d'un accident, les 2/5 de la pièce ont dû être cédés à 24 fr. le mètre et le reste à 30 fr. Il en résulte une perte totale de 168 fr. Quelle était la longueur totale de cette pièce? (*C. Compl.*)

*1174. – Un négociant à acheté un certain nombre de douzaines d'oeufs à $4^{fr}.20$ la douzaine. Il en vend d'abord la moitié à $4^{fr}.50$ la douzaine, puis les 2/3 du reste a $5^{fr}.40$ la douzaine et le reste final a $5^{fr}.70$ la douzaine. Il réalise un bénéfice total de $25^{fr}.20$. Combien avait-il acheté de douzaines d'oeufs? (*Lgc. et Col.*)

*1175. – Un marchand achète un lot de moutons à trois prix. Il a payé le tiers à raison de 126 fr. par tête: les 2/3 à raison de 115 fr. et le reste à raison de 20 fr. Il revend le tout pour 10044 fr. et gagne ainsi 1/3 du prix d'achat. De combien de moutons se composait le tout?

*1176. – Pour payer 64500 fr. on a donné des billets de: 200 fr., 500 fr. et 100 fr. Combien a-t-on employé de billets de chaque espèce, sachant que le nombre des billets de 500 fr. est les 6/7 du nombre des billets de 1000 fr. et les 3/4 de nombre des billets de 100 fr.?

ANNEXE 4

La résolution de problèmes par l'algèbre. 1. Un extrait de Newton 1707.

DE LA RESOLUTION

Méthode pour mettre une question en équation

Lorsqu'on ne sera suffisamment exercé à transformer et à réduire des équations, il faut essayer ses forces, en mettant des questions en équation. Une question étant proposée, une partie importante de l'art du calculateur consiste à exprimer par des équations chacune des conditions du problème. Pour y parvenir, il examinera d'abord si toutes ces conditions peuvent être exprimées par des caractères algébriques, de la même manière que nous peignons nos pensées par le moyen des lettres de l'alphabet. Si la chose est possible (comme elle l'est toujours, lorsque la question roule sur des nombres ou sur des quantités abstraites), alors il donnera des noms aux quantités connues, de même qu'aux quantités inconnues; et le sens de la question sera exprimé, si on peut parler ainsi, par un discours analytique. Et le conditions ainsi traduites en langage algébrique, donneront autant d'équations qu'il en faut pour résoudre la question.

Par exemple, qu'on demande trois nombres en proportion continue, dont la somme soit 20, et la somme des quarrés 140, j'appellerai des trois nombres inconnus x, y, z; et la question sera traduite du langage ordinaire en langage algébrique, en cette manière:

Question énoncée en langage ordinaire	*La même en langage algébrique.*
On cherche trois nombres qui aient ces conditions:	x, y, z
1°. Qu'ils soient en proportion continue.	$x : y :: y : z$, ou bien $xz = y^2$.
2°. Que leur somme fasse 20.	$x + y + z = 20$
3°. Que la somme de leurs quarrés fasse 140.	$x^2 + y^2 + z^2 = 140$.

Ainsi la question est réduite aux équations $xz = y^2$, $x + y + z = 20$, $x^2 + y^2 + z^2 = 140$. A l'aide de ces équations et des règles données précédemment, on trouvera les valeurs de x, de y et de z.

Au reste, il faut observer que la résolution des problèmes est d'autant plus facile et plus élégante, qu'on emploie moins d'inconnues. Ainsi dans le problème dont il s'agit, en mettant x pour la première inconnue, y pour la seconde, la troisième sera $\frac{y^2}{x}$, qui est en proportion continue avec le deux autres. J'énonce don la question en cette manière:

En langage ordinaire.	*En langage algébrique.*
Cercher trois nombres en proportion continue,	$\div\!\div\, x : y : \frac{y^2}{x}$.
dont la somme soit 20,	$x + y + \frac{y^2}{x} = 20$.
et la somme des quarrés 140.	$x^2 + y^2 + \frac{y^2}{x^2} = 140$.

Les deux équations $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$, et $x^2 + y^2 + \frac{y^2}{x^2} = 140$ étant réduites, on en tirera les valeurs de x et de y.

Voici un autre exemple. Un marchand augmente son argent d'un tiers chaque année, moins cent livres(*) qu'il dépense dans le même espace de temps pour les besoins de sa famille; au bout de trois ans ses richesses sont doublées; on demande combien il avait d'argent. Voici toutes les propositions qui sont renfermées implicitement dans cette question, et qui doivent être exprimées, pour parvenir à la résolution du problême.

(*)Il s'agit ici, comme on pense bien, de livres sterlings, ainsi cent livres font environ 2200 francs.

Question exprimée en langage ordinaire.	*La même en langage algébrique.*
Un marchand a un certain nombre d'écus, sur lesquels il dépense cent livres la première année;	x. $x - 100$.
Il augmente ce qui lui reste d'un tiers.	$x - 100 + \frac{x-100}{3}$, ou bien $\frac{4x-100}{3}$.
La seconde année il dépense encore cent livres, et il augmente ce qui lui reste d'un tiers.	$\frac{4x-400}{3} - 100$, ou bien $\frac{4x-700}{3}$. $\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9}$, ou bien $\frac{16x-2800}{9}$.
La troisième année il dépense encore cent livres, et il augmente ce qui lui reste d'un tiers, et il se trouve deux fois plus riche qu'au commencement de la première année.	$\frac{16x-2800}{9} - 100$, ou bien $\frac{16x-3700}{3}$. $\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27}$, ou bien $\frac{64x-14800}{27}$. $\frac{64x-14800}{27} = 2x$.

Ainsi la question est exprimée par l'équation $\frac{64x-14800}{27} = 2x$, et en la résolvant, on en tirera la valeur de x. Multipliez-la par 27, et vous aurez $64x-14800 = 54x$; retranchez de chaque membre $54x$, et le reste sera $10x - 14800 = 0$; ou bien $10x = 14800$, et en divisant par 10, il viendra $x - 14800$. Ainsi 1480 est le nombre de livres qu'il avait au commencement de la première année.

Vous voyez que, dans le problêmes qui ne renferment que des nombres, ou des quantités abstraites, il n'y a, pour ainsi dire, rien autre chose à faire qu'à traduire la question du langage ordinaire en langage algébrique; c'est-à-dire, à exprimer ses conditions par des caractères propres à peindre nos idées sur les rapports des quantités. Il arrive assez souvent que le discours par lequel l'état d'une question est exprimé, ne paraît pas pouvoir être traduit en langage algébrique; mais on l'y disposera facilement, en opérant quelques changements, et sur-tout en s'attachant plus aux sens de paroles qu'aux paroles elles-mêmes.

C'est ainsi que toutes les langues ayant leur idiôme particulier, lorsqu'il faut faire passer un ouvrage de l'une dans une autre, ce ne sont pas les mots, mais les pensées qu'il faut traduire. Au reste, comme les arts s'apprennent bien plus facilement par des exemples que par des préceptes, je vais donner ici la solution de plusieurs problêmes.

PROBLÈME Ier.

La somme de deux nombres égale a; la difference de leur quarré est b; on demande quels sont ces deux nombres?

Soit x le plus petit, l'autre sera $a-x$; leurs quarrés seront respectivement x^2, et $a^2-2ax+x^2$; la différence de ces quarrés est a^2-2ax, qu'on suppose égale à b. On a, par conséquent, l'équation $a^2-2ax=b$, donc en réduisant, $a^2-b=2ax$, ou bien $\frac{a^2-b}{2a}=x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2a}$.

EXEMPLE. Si la somme des deux nombres que nous avons supposée a, est 8, et la différence b de leurs quarrés, 16, on aura $x=\frac{64-16}{16}$, ou $x=3$, et $a-x=5$; le deux nombres seraient donc 3 et 5.

PROBLÈME II.

On a trois quantités x,y,z. On connaît le sommes de ces quantités prises deux à deux, on demande la valeur de chacune en particulier?

Soit a la somme des deux quantités x et y; et b, celle de x et z; enfin c, celle de y et z. Pour déterminer le trois quantités x,y et z, on a donc le trois équations $x+y=a$; $x+z=b$; et $y+z=c$. Maintenant pour éliminer deux des trois inconnues y et z, par exemple, retranchez x dans la première et dans la seconde équation, et vous aurez $y=a-x$; et $z=b-x$, substituez ces valeurs de y et z, dans la troisième $y+z=c$, elle deviendra, $a-x+b-x=c$; et en réduisant et dégageant x, vous aurez, $x=\frac{a+b-c}{2}$. x étant trouvé, on substituera sa valeur dans le deux équations $y=a-x$ et $z=b-x$, et on aura les valeurs de y et de z.

Par exemple, si la somme de y et de x est 9; celle de x et z, 10; et celle de y et z, 13; alors substituez dans les équations, 9 au lieu de a; 10 au lieu de b, et 13 au lieu de c; et $a+b-c$ sera égal à 6. Et $x=\frac{a+b-c}{2}=3$; $y=a-x=6$; et $z=b-x=7$

PROBLÊME III.

Il s'agit de partager un nombre donné en parties telles, que chacune des plus grandes surpasse la plus petite d'une quantité donnée.

Soit a la quantité qu'il faut partager en quatre parties, et x la première et la plus petite de ces parties; b l'excès de la seconde sur la première; c l'excès de la troisième; et d l'excès de la quatrième. La seconde partie sera donc $x+b$, la troisième $x+c$, et la quatrième $x+d$. La somme de toutes ces parties sera $4x+b+c+d$ qui

doit être égale à a. Donc $4x+b+c+d=a$. Retranchez de part et d'autre, $b+c+d$, et le reste sera $4x=a-b-c-d$, ou $x=\frac{a-b-c-d}{4}$.

Par exemple, qu'il s'agisse de partager une ligne de 20 pieds en quatre parties, de manière que l'excès de la seconde sur la première soit de deux pieds; celui de la troisième sur la première de 3 pieds, et enfin celui de la quatrième de 7 pieds. La valeur de x sera $x=\frac{a-b-c-d}{4}$, ou $x=\frac{20-2-3-7}{4}=2$. $x+b=4$, $x+c=5$, $x+d=9$.

On suivra la même marche pour diviser une autre quantité quelconque, en un nombre de parties telles qu'on voudra.

PROBLÊME IV.

Un homme veut distribuer de l'argent à des pauvres. S'il avait huit deniers de plus, il pourrait en donner trois à chacun; il ne leur en donne donc que deux, et il lui en reste trois. On demande le nombre des pauvres?

Soit x le nombre des pauvres. Il s'en faut de huit deniers que l'homme ne puisse distribuer $3x$. Son argent peut donc être représenté par $3x-8$. Il distribue sur cet argent $2x$ deniers: par conséquent, ce qui lui reste après la distribution sera représenté par $3x-8-2x$, ou $x-8$; mais nous avons dit que ce reste était égal à trois deniers; par conséquent, $x-8=3$, ou $x=11$.

PROBLÊME V.

Deux messagers A et B sont éloignés l'un de l'autre de 59 milles; ils partent le matin pour aller à leur rencontre mutuelle. A fait 7 milles en deux heures, et B en fait 8 trois heures, mais A est parti une heure avant B. On demande combien A fera de milles avant de rencontrer B.

Appelez ce nombre de milles x. Alors $59-x$ sera le chemin qu'aura fait B. Et comme A fait 7 milles en deux heures, il fera x de milles en $\frac{2x}{7}$ d'heures; ce qu'on trouve en faisant cette proportion, 7 milles : 2 heures :: x milles : $\frac{2x}{7}$ heures. De même, comme B fait 8 milles en 3 heures, il fera $59-x$ milles en $\frac{177-3x}{8}$ d'heures. Maintenant, comme la différence de ces temps est 1 heure, ils deviendront égaux, en ajoutant 1 au plus petit, c'est-à-dire à $\frac{177-3x}{8}$; et on aura l'équation $1+\frac{177-3x}{8}=\frac{2x}{7}$. Et en réduisant, on trouve $x=35$. En effet, si l'on multiplie l'équation $1+\frac{177-3x}{8}=\frac{2x}{7}$ par 8, elle devient, $8+177-3x=\frac{16x}{7}$, ou

$185-3x = \frac{16x}{7}$, et en multipliant de nouveau tout par 7, on a enfin, $1295-21x = 16x$, ou, $1295 = 37x$; et en divisant par 37, on a, $x = 35$. Ainsi A fera 35 milles avant de rencontrer B.

Le même problême d'une manière plus générale.

On donne les vitesses de deux mobiles A et B; on donne aussi la différence des temps et des lieux de départ; on demande de déterminer le lieu où ils se rencontrent.

Supposez que la vitesse de A soit telle, qu'il parcoure l'espace c pendant le temps f; et celle du mobile B telle, qu'il parcoure l'espace d dans le temps g; supposez encore que la différence des points de départ soit e, et la différence des instants de départ h.

PREMIER CAS.

Si les deux mobiles vont dans le même sens, et que A poursuive B, le chemin de A sera égal à celui de B, plus à l'intervalle qui séparait les deux mobiles au commencement du mouvement: appelez x le chemin de A; retranchez c de x, et le reste $x-c$ sera le chemin de B. Et comme A parcourt l'espace c dans le temps f, on trouvera le temps qu'il emploie pour parcourir x par cette proportion, l'espace c: au temps f :: l'espace x : au temps $\frac{fx}{c}$. Et comme B parcourt l'espace d dans le temps g, il parcourra l'espace $x-c$ dans le temps $\frac{gx-ge}{d}$. Et comme on suppose la différence des temps égale à h, il suffira d'ajouter h au plus petit pour les rendre égaux; par exemple à $\frac{fx}{c}$ si c'est B qui a commencé à se mouvoir le premier, et on aura l'équation $\frac{fx}{c}+h = \frac{gx-ge}{d}$; et en réduisant il vient, $\frac{cge+cdh}{cg-df} = x$. Si au contraire c'est A qui est entré le premier en mouvement, alors il faut ajouter h à $\frac{gx-ge}{d}$, et le soleil le sera par B, et $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ sera la longueur du chemin que fera la lune. Et si on substitue dans la formule, 13 au lieu de c; 1 au lieu de f, d et g; 90 au lieu de e; et 3 au lieu de h, elle deviendra $\frac{13\times 1\times 90+13\times 1\times 3}{13\times 1-1\times 1} = \frac{1209}{12} = 100\frac{3}{4}$. Comptez donc ces cent degrés trois quarts depuis le commencement du bélier, et vous arriverez à $10°\frac{3}{4}$, au $10°45'$ du cancer.

Exemple II. Si deux messagers, A et B, éloignés l'un de l'autre de 59 milles, partent le matin pour aller à leur rencontre mutuelle; que A fasse 7 milles en deux heures, et B, 8 milles en trois heures; que B se mette en route une heure plus tard que A, on demande le chemin que fera A avant de rencontrer B. Rép. 35 milles. En

effet, puisqu'ils vont à la rencontre l'un de l'autre, et ce que c'est A qui s'est mis le premier en route, ce sera la formule $\frac{cge + cdh}{cg + df}$ qui désignera le chemin qu'aura fait A avant de rencontrer B. Et si on substitue dans cette formule 7 pour c, 2 pour f, 8 pour d, 3 pour g, 59 pour e, et 1 pour h, elle deviendra $\frac{7 \times 3 \times 59 + 7 \times 8 \times 1}{7 \times 3 + 8 \times 2} =$ $= \frac{1295}{37} = 35.$

ANNEXE 5

La résolution de problèmes par l'algèbre. 2. Un extrait de Laplace 1795.

Proposons-nous encore le problème suivant:

Deux lumières, dont l'une est quatre fois plus intense que l'autre, étant séparées par un intervalle de trois pieds; déterminer sur la droite qui les joint, le point qu'elles éclairent également.

Si l'on nomme x la distance de la plus faible lumière à ce point, cette distance étant supposée dirigée vers la plus forte lumière; $3 - x$ sera la distance de la plus forte lumière au même point: or, on sait que la force de la lumière décroit en raison du carré de la distance; en sorte que $\frac{1}{x^4}$ sera la force de la plus petite lumière, à la distance x; et $\frac{4}{(3-x)^2}$ sera la force de la plus grande, à la distance $3 - x$; ainsi, ces forces devant être égales par la condition du problème, on a

$$\frac{1}{x^4} = \frac{4}{(3-x)^2},$$

ce qui donne, après les réductions convenables,

$$x^2 + x = 3;$$

d'où l'on tire

$$x = -1 = 2.$$

Les deux valeurs de x sont donc $x = 1$ et $x = -3$. La première apprend que le point également éclairé par les deux lumières, et placé entre elles, est à un pied de distance de la plus faible. La seconde valeur est négative; elle montre ce que l'on pouvait ignorer d'abord, savoir qu'il existe un second point également éclairé par les lumières, et placé à trois pieds de distance de la plus faible, mais en sens contraire du premier, c'est-à-dire sur la droite qui joint les deux lumières, prolongée du côté à la plus forte. En effet, il est visible que ce point étant à trois pieds de distance de la plus faible lumière, et à six pieds de distance de l'autre, il est également éclairé par les deux lumières. Vous voyez par-là que les valeurs négatives satisfont, comme les positives, aux problèmes; mais elles doivent être prises dans un sens opposé à celui des valeurs que l'on considère comme positives. Ces solutions inattendues nous prouvent la richesse de la langue algébrique, a la généralité de laquelle rien n'échappe, quand on la sait bien lire.

ANNEXE 6

Quand l'addition des entiers s'applique-t-elle? Extrait de Lebesgue 1932, pp. 5-6.

3. – Mais que devient alors la "certitude mathématique", qui a fixé de tout temps l'attention des philosophes, s'il n'y a plus que des "mathématiques appliquées"? Elle déchoit et n'est plus que la moins précaire de nos certitudes: l'Arithmétique, dont les hommes, dans leur aspirations vers l'absolu, avaient fait "la science parfaite par excellence", n'est plus que la moins imparfaite de nos sciences. Elle est la science humainement parfaite, qui, pratiquement, ne nous trompe jamais: d'où lui vient cette supériorité?

Et tout d'abord comment se fait-il que nous nous trompions si souvent alors que nous croyons appliquer un résultat expérimental? C'est que les frontières d'un tel résultat ne sont jamais bien connues: quand nous disons: une baguette de verre, frottée, attire de petits morceaux de papier, ceci suppose remplies bien des conditions sous-entendues et mal connues. Il faudrait pouvoir préciser ce qu'on appelle du verre, du papier, ce qu'on appelle frotter, préciser les temps, les distances, les masses, et aussi les conditions atmosphériques, etc.

L'arithmétique, elle, n'utilise qu'un très petit nombre d'expériences, dont chacune a été répétée un nombre prodigieux de fois par chaque homme, depuis qu'il y a des hommes. Aussi nous savons, sans hésitation, dans quels cas l'arithmétique s'applique, dans quels cas elle ne s'applique pas. Dans ces derniers cas, l'idée d'appliquer ne nous effleure pas un instant: nous ne pensons à appliquer l'arithmétique que lorsqu'elle s'applique, si bien que nous oublions qu'il y a des cas où elle ne s'applique pas: deux et deux font quatre: affirmons-nous.

Dans un verre je verse deux liquides, dans un autre deux liquides. Je verse le tout dans un vase, contiendra-t-il quatre liquides? – C'est de la mauvaise foi, dites-vous, ce n'est pas une question d'arithmétique.

– Dans une cage je mets deux animaux, puis encore deux animaux: combien le cage contient-elle d'animaux? – Votre mauvaise foi, dites-vous, est plus éclatante encore: cela dépend de l'espace de ces animaux, l'un d'entre eux pourrait dévorer les autres: il faut aussi savoir si le décompte doit avoir lieu immédiatement ou dans un an, alors que des animaux pourraient être morts ou avoir eu des petits. En somme, vous parlez de collections desquelles on ne sait si elles sont immuables, si chaque objet y garde son individualité, s'il y a pas des objets qui apparaissent où disparaissent.

– Qu'est-ce à dire, sinon que certaines conditions doivent être remplies pour que l'arithmétique s'applique? Quant à la règle, pour reconnaître si elle s'applique, que vous venez de me donner, elle est certes excellente pratiquement, expérimentalement, mais elle n'a aucune valeur logique. Elle est l'aveu que l'arithmétique s'applique quand elle s'applique. Et c'est pourquoi on ne peut pas démontrer que deux et deux font quatre, ce qui est pourtant la verité par excellence, car jamais nous ne nous trompons en l'utilisant.

Dans les exposés purement logiques, où l'arithmétique s'occupe de symboles vidés de toute signification, c'est grâce seulement à un axiome que deux et deux font quatre. Je n'ai pas à parler ici de ce genre d'exposés, mais je puis bien dire que, si leur importance mathématique est considérable, s'ils nous ont beaucoup appris, ils me paraitraient voués à un insuccés absolu si on voulait les considérer comme élucidant la notion de nombre sans faire appel à l'expérience. Dans ces jeux logiques il faut, en effet, manier des collections de symboles, réalisés ou pensés peu importe, et c'est alors qu'interviennent toutes nos connaissances, acquises grâce à l'expérience, relatives aux collections, c'est-à-dire aux nombres.

Yves CHEVALLARD

IREM, Université de Marseille Luminy – case 901

70, route Léon-Lachamp

13288 Marseille, France.

Lavoro pervenuto in redazione il 15/12/1993

Finito di stampare nel gennaio 1995
presso la Lito-Copisteria Valetto - Torino
per conto di
Silvio Zamorani editore - Torino